The Mostow Rigidity Theorem

Problem Set 1

Дано: компактные гиперб. мн-я $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$.

Изоморфизм $\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ даёт гомотопию $f : M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$, ее лифт есть гладкая гомотопия $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[d, "/\Gamma_1"'] & \mathbb{H}^n \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[d, "/\Gamma_2"] \\
M_1 \arrow[r, bend left, "f"] & M_2 \arrow[l, bend left, "g"] \\
\Gamma_1 \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

① Пусть $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Докажите, что γ продолжается до гомеоморфизма $\partial\gamma : \partial\mathbb{H}^n \xrightarrow{\approx} \partial\mathbb{H}^n$

$\partial\gamma : S^{n-1} \to S^{n-1}$

② Доказать, что $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ можно взять φ-эквивариантным, т.е. $F \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ F$

$[F(\gamma x) = \varphi(\gamma)(F(x))]$

③ В доказательстве псевдо-изометричности отображения F надо строго обосновать, почему $\frac{1}{C}\rho(x,y) - C_2 \leq \rho(F(x), F(y))$.

(Hint: Надо использовать C-липшицевость отобр-ий F и G, φ-эквив-ть и тот факт M_1 (и фунд. обл. группы Γ_1) комп., в частн. что $\mathrm{diam}(D_1)$ ограничен, а также, что $F \circ G \simeq Id_{\mathbb{H}^n}$.)

④** a) Пусть $F \in QConf(S^{n-1}) \cap Homeo(S^{n-1})$. Доказать, что $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ существуют почти всюду.

b) Вывести отсюда, что F дифф. п.в.

c) Более того, если $n \geq 3$, то dF равном. огран., т.е. $\exists\, \lambda > 1$, т.ч. для почти всех $x \in S^{n-1}$ и $\forall v \in T_x S^{n-1}$ выполнено $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\|d_x F(v)\|}{\|v\|} < \lambda$

d) Привести контрпример к b) при $n = 2$.

** Коммент: Видимо, очень непростая теор. Обычно сводят к теор. Радемахера-Степанова

Вопрос: Можно ли доказать тут C-липшиц и исп-ть класс. теор из матана?

(5) Пусть $F \in \mathrm{Homeo}(S^{n-1}) \cap C^1(S^{n-1})$. Доказать, что
$F \in K\text{-}QConf(S^{n-1}) \iff dF \in K\text{-}QConf(TS^{n-1})$.

(6) Если $F \in QConf(S^{n-1})$ и $dF \in Conf(TS^{n-1})$, то $F \in Conf(S^{n-1})$.

(7) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - вероятн. пр-во, и пусть $T: X \to X$ - отобр., сохр. меру, т.е. $T_*\mu(E) := \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$. Тогда след. усл. эквив:

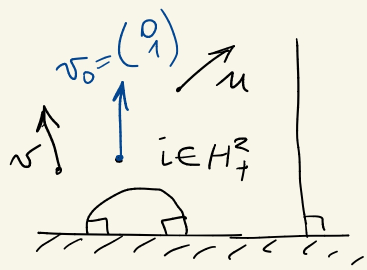
(A) T – эргодичное отобр., т.е. такая, для которой выполнено
$T(E) = E$, где $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(E) = 0$ или $\mu(X \setminus E) = 0$

(B) Всякая μ-п.в. T-инвар. ф-ция $f: X \to \mathbb{R}$ (т.е. μ-п.в. $f(Tx) = x$) явл. μ-п.в. постоянной

(C) Всякая T-инв. ф-ция $f \in L^1(X, \mu)$ явл. const.

(D) Всякая T-инв. ф-ция $f \in L^2(X, \mu)$ явл. const.

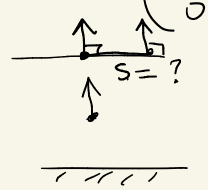
(8) Рассм. H^2 в модели $H^2_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.



(A) Покажите, что $PSL_2(\mathbb{R}) = Isom^+(H^2) \underset{\text{транз}}{\curvearrowright} H^2$ и
просто транз на T^1H^2: $\forall u, v \in T^1H^2 \ \exists g \in PSL_2(\mathbb{R})$ т. что $dg(u) = v$.

(B) Ясно, что $PSL_2(\mathbb{R}) \simeq T^1H^2$ с помощью отображения $g \mapsto g v_0$, где $v_0 \in T^1_i H^2$.
Покажите, что если $v = \gamma v_0$, то $g_t(v) = \gamma \cdot \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$.

(C) Покажите, что $h^+_s(v) = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



(D) Провести аккуратно док-во
теор Хопфа для пов-ти $M = H^2/\Gamma$.

(9) *** Какая связь устойчивых и неустойчивых слоений $W^+(u)$ и $W^-(u)$ с орисферами? Как корректно определять потоки h^+_s и h^-_s при $n > 2$?
Доказательство теор. Хопфа в общем случае $n \geq 2$.

(10) Почему корр. определены $v_1(F(x)), \dots, v_{n-1}(F(x))$ для $F: S^{n-1} \to S^{n-1}$?
Почему $\exists$ инв. базисное поле, если $e_F \equiv const > 1$? Что делать, если $\|v_i\| = \|v_j\|$?
Какая связь "const > 1" с измеримостью?