Риман-Рох, Кодаира-Накано и прочее

11 декабря 2020 г. 13:02

(M,ω) — кэлерово, например $\mathbb{C}P^n$. Если $E \to M$ — гол. вект. рассл-е, то на сечениях есть оператор $\bar\partial$ и $\bar\partial^2 = 0$

Когомологии обозн. $H^q(M,E)$

$$h^{0,q}(L) := \dim H^q(M,E)$$

$$\chi(M,E) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{0,q}(E)$$

$Td(M)$ — класс Тодда, опр. по ряду $\frac{x}{1-e^{-x}}$.

$ch(E)$ — опр. с пом. e^x

Для лин. рассл-я L

$$ch(L) = \sum^{\infty} \frac{c_1^k(L)}{k!}.$$

$$ch(L) = \sum_{k=0} \frac{c_1^k}{k!}.$$

Th (Римана-Роха-Хирцебруха):

$$\chi(M, L) = \int_M Td(M)\, ch(L)$$

В частности

$$\chi(M, \mathcal{O}) = \int_M Td(M)$$

L - гол. лин. рассл-е.

Пусть L - положительное, т.е. $\exists\, h$ на L, т.ч. $F_h = -i\partial\bar\partial \log h > 0$

Th (Кодаира-Акидзуки-Накано):

L - положительное $\Rightarrow$

$H^q(M, K_M \otimes L) = 0$ при $q \geq 1$.

L - положительное $\Rightarrow$

$\Rightarrow H^q(M, K_M \otimes L) = 0$ при $q \geq 1$.

L - отрицательное $(F_h < 0)$,

Тогда $H^q(M, L) = 0$ при $q < n$.

Д-во:

$D = D' + \bar\partial$ - связность Черна

$F_h = D^2 = \bar\partial D' + D'\bar\partial = \{\bar\partial, D'\}$

$\Delta_{\bar\partial} = \bar\partial^* \bar\partial + \bar\partial \bar\partial^* = \{\bar\partial, \bar\partial^*\}$

$\{A, B\} := AB - (-1)^{ab} BA$

$\Delta_{D'} = \{D', D'^*\}$

$\Lambda : \Omega^{k,m} \longrightarrow \Omega^{k-1,m-1}$

$\Lambda = - * \omega \wedge *$, $*$ - звезда Ходжа

; $\bar\partial^* = \{\Lambda, D'\}$; $-iD'^* = \{\Lambda, \bar\partial\}$

$i\bar\partial^* = \{\Lambda, D\}$, $-iD = \{\Lambda, \bar\partial\}$

<u>Супер - Якоби:</u>

$$(-1)^{ac}\{A,\{B,C\}\} + (-1)^{ba}\{B,\{C,A\}\} + (-1)^{cb}\{C,\{A,B\}\} = 0$$

$$\Delta_{\bar\partial} - \Delta_{D'} = \{\bar\partial, i\{\Lambda, D'\}\} - \{D', i\{\Lambda, \bar\partial\}\} = -\{\Lambda, iF\} = \{iF, \Lambda\}$$

α — (p,q)-форма из $\operatorname{Ker}\Delta_{\bar\partial}$

$\omega = iF$ $\qquad \{\omega, \Lambda\} = (p+q-n)$ на (p,q)-формах

$$-\Delta_{D'}\alpha = (p+q-n)\alpha$$

$$-\int_M \langle \Delta_{D'}\alpha, \alpha\rangle = (p+q-n)\int_M |\alpha|^2$$

$- \int_M \qquad\qquad M$

$\alpha \in H^q(M, K_M \otimes L)$ — это (n,q) форма со зн. в L.

$\blacksquare$

(M,ω) — кэл. и голом. $\mathbb{C}P^n$.

1) M проективно.

$$\mathbb{C} \cong H^2(M,\mathbb{C}) = \cancel{H^{2,0}(M)} \oplus H^{1,1}(M) \oplus \cancel{H^{0,2}(M)}$$

$\mathbb{C} \cong H^{1,1}(M,\mathbb{C})$, $H^{2,0}(M) = 0$

$[\lambda\omega]$ · целоч.

Тогда можно пол., что $[\lambda\omega] = c_1(L)$ для нек. пол. лин. р-я L.

Возьмем λ, чтобы $\int_M c_1^n(L) = 1$.

[illegible] $\mathcal{O}_M$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 1$$

$$0 \to H^1(M,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

$$H^1(M,\mathcal{O}) = H^2(M,\mathcal{O}) = 0$$

$$H^1(M,\mathcal{O}) = H^{0,1}(M) = 0, \qquad H^2(M,\mathcal{O}) = H^{0,2}(M) = 0$$

2.) $\hat{A}(M)$ – когом. класс, кот. задается рядом

$$\frac{\frac{x}{2}}{\sinh(x)} = f(x)$$

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = e^{\frac{x}{2}} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = e^{\frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{2}}{\sinh(x)}$$

$$Td(M) = e^{\frac{c_1(M)}{2}} \hat{A}(M)$$ – пишется через кл. Понтрягина

x_i – корни Черна –

$x_1, \ldots, x_r$ – корни Черна

$f(x_1) \ldots f(x_n) = \left[\begin{array}{l} \text{симм.} \\ \text{мн-н от } x_j^2 \end{array} \right]$

<u>Th (Новиков)</u>: Рац. классы Понтрягина перех. друг в друга при гомеом.

$f: M \to \mathbb{C}P^n$ – гомеом.

$\sim f^* p_j(\mathbb{C}P^n) = p_j(M)$

3.) a – обр. в когомологиях $\mathbb{C}P^n$

$a \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ и $\int a^n = 1$

$$p_j(\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{j} a^{2j}$$

$$f^* a = \pm \tilde{a}$$

$$p_j(M) = \binom{n+1}{j} \tilde{a}^{2j}$$

4.) $\nu(M \mathcal{D}) = \int e^{\frac{c_1(M)}{2}} \hat{A}(M)$

4.) $\chi(M, \mathcal{O}) = \int e^{\frac{c_1(M)}{2}} \hat{A}(M)$

$c_1(M) \equiv w_2(M) \mod 2$

$\varphi : \mathbb{C}P^\infty \to Gr_+^{\mathbb{R}}(2, \infty)$

$\varphi^* w_2(\gamma_2)$

$w_2(M) = f^* w_2(\mathbb{C}P^n)$

$w_2(\mathbb{C}P^n) \quad c \quad (n+1)a \mod 2$

$\Rightarrow w_2(M)$ cofm $((n+1)\hat{a} \mod 2$

$c_1(M) = (n+1+2k)\tilde{a}$

$\hat{A}(M) = f^* \hat{A}(\mathbb{C}P^n)$

$$\hat{A}(M) = \left(\frac{\frac{\tilde{a}}{2}}{\sinh(\tilde{a})}\right)^{n+1}$$

$$1 = \chi(M, \mathcal{O}) = \int e^{\frac{(n+1+2k)}{2}\tilde{a}} \left(\frac{\frac{\tilde{a}}{2}}{\sinh(\tilde{a})}\right)^{n+1} =$$

ma $\quad$ $)^{n+1}$

$$= \int_M e^{k\tilde{a}} \left(\frac{\tilde{a}}{1-e^{-\tilde{a}}} \right)^{n+1} \qquad \int_M \tilde{a}^n = 1$$

$e^{kx} \left(\frac{x}{1-e^{-x}} \right)$ – коэфф при x^n

Он равен $\binom{n+k}{n} =$

$$= \frac{(n+k) \cdot \ldots \cdot (k+1)}{n!} = 1$$

$k = 0$

n – нечетно, то $k = -n-1$.

$c_1(M) = (n+1)\tilde{a} > 0$, либо $-(n+1)\tilde{a} < 0$

$K_M = -(n+1) L$

L, т.ч. $c_1(L) = \tilde{a}$

$$H^q(M,L) = H^{n-q}(M, K_M \otimes L^{-1}) =$$

$$= H^{n-q}(M, L^{-(n+2)}) = 0$$

кроме $q=0$

т.е. только $H^0(M,L) \neq 0$

$$\chi(M,L) = \int_M e^{\frac{n+1}{2}\tilde{a}+\tilde{a}} \left(\frac{\tilde{a}}{1-e^{-\tilde{a}}}\right)^{n+1} =$$

$= n+1$, т.е. $\dim H^0(M,L) = n+1$

5.) $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ – базис в $H^0(L)$

$$D_j = \{x \in M \mid \varphi_j(x) = 0\}$$

$$V_{n-k} = D_1 \cap \ldots \cap D_k$$

$\overline{\qquad}$

$\overset{\uparrow}{\partial}$ф. по Пуанкаре $\tilde{a}^k$.

Более того, они неприв.

V_0 — точка x

$\varphi_{n+1}(x) = 0$

$\Rightarrow$ L не имеет баз. точек

$\Rightarrow$ $\tilde{x} \mapsto [\varphi_0(\tilde{x}) : \ldots : \varphi_{n+1}(\tilde{x})]$

$\begin{array}{ccc} \tilde{x} & & [\varphi_0(\tilde{x}) : \ldots : \varphi_{n+1}(\tilde{x})] \\ \top & & \top \\ M & & \mathbb{CP}^n \end{array}$

Это бигомоморфизм