Оценки для Монжа-Ампера

13 ноября 2020 г. 13:02

$$MA_t = \begin{cases} (\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^n = \exp(tF+\varphi)\omega^n \\ t\in[0;1] \quad \omega + i\partial\bar\partial\varphi > 0 \end{cases}$$

Хотим:

Мн-во t, для кот. реш-е

$\exists$

1.) Непуст; 2.) Открыто; 3.) Замкн.

Оценки на $\|\varphi\|_{C^0}$, $\|\varphi\|_{C^2}$ и

$\|\varphi\|_{C^3}$.

Отступление: пр-во Гёльдера

$C^{k,\alpha}(M)$: $\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \sum_{j=0}^{k} \sup|\nabla^j f| +$

$$+ \sup_{x,y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\operatorname{dist}(x,y)^\alpha} \Big) \quad \alpha \in (0;1)$$

Нер-во Шаудера: $\exists C$

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\left(\|\Delta\varphi\|_{C^{0,\alpha}} + \|\varphi\|_{L^1}\right)$$

Оценка на $\|\varphi\|_{C^0}$:

$$\begin{cases} (\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^n = \exp(F+\varphi)\,\omega^n \\ \omega + i\partial\bar\partial\varphi > 0 \end{cases}$$

Утв: $\sup_M |\varphi| \leq \sup_M |F|$.

Д-во: p — точка макс. φ.

$\Rightarrow (\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^n(p) \leq \omega^n \Rightarrow$

$\exp(F(p)+\varphi(p)) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(p) + \varphi(p) \leq 0 \Rightarrow \varphi(p) \leq -F(p) \leq \sup|F|$

$\Rightarrow \sup|\varphi| \leq \sup|F|$ ∎

C^2-оценка:

Т-ма: а.) $\exists C_1$: $\|\Delta\varphi\|_{C^0} \le C_1$

б.) $\exists C_2$: $C_2^{-1} g_{a\bar b} \le g_{a\bar b} + \partial_a \partial_{\bar b} \varphi \le$

$\le C_2 g_{a\bar b}$

Д-во: $g'_{a\bar b} = g_{a\bar b} + \partial_a \partial_{\bar b} \varphi$

Δ', ∇' — по отн. к $g'_{a\bar b}$

$\Delta' \varphi = - g'^{a\bar b} \partial_a \partial_{\bar b} \varphi$. $\quad tr_g g' = n - \Delta' \varphi$

Рассм-м $\Delta' \log tr_g g'$. $\quad tr_g g' = g^{a\bar b} g'_{ab}$

$\exists B, C > 0$

$$\Delta' \log tr_g g' \le B\, tr_{g'} g + \frac{g^{a\bar b} R'_{a\bar b}}{tr_g g'} \quad (*)$$

$$R'_{a\bar b} = -\partial_a \partial_{\bar b} F - \partial_a \partial_{\bar b} \varphi + R_{a\bar b}$$

$(*) = B\, tr_{g'} g + \dfrac{\Delta F + \Delta \varphi + R}{\ldots} =$

$$(*) = B\,\mathrm{tr}_{g'} g + \frac{\ldots}{\mathrm{tr}_g g'}$$

$$= B\,\mathrm{tr}_{g'} g + \frac{\Delta F + n - \mathrm{tr}_g g' + R}{\mathrm{tr}_g g'} \le$$

Заметим: $\mathrm{tr}_{g'} g \cdot \mathrm{tr}_g g' \geq n^2$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{tr}_g g'} \le \frac{\mathrm{tr}_{g'} g}{n^2}$$

$$\le B\,\mathrm{tr}_{g'} g + C\,\mathrm{tr}_{g'} g = (B+C)(\Delta'\varphi + n)$$

$$\Delta'\varphi = -g'^{a\bar b}\partial_a \partial_{\bar b}\varphi =$$

$$= -g'^{a\bar b}(g'_{a\bar b} - g_{a\bar b}) = \mathrm{tr}_{g'} g - n$$

$$\Delta' \log \mathrm{tr}_g g' \le (B+C)\,\mathrm{tr}_{g'} g$$

$$\ldots \le (B+C)(\Delta'\varphi + n)$$

$$\Delta'(\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi) \le (B+C)(\Delta'\varphi + n) - A\Delta'\varphi = (B+C)\,\mathrm{tr}_{g'} g - A(\mathrm{tr}_{g'} g - n)$$

$$A := B + C + 1$$

$$\Delta'(\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi) \le An - \mathrm{tr}_{g'} g$$

$p \in M$ — точка макс. для $\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi$. Тогда в этой точке

$$\mathrm{tr}_{g'} g \le An$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \le An$$

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \underline{\exp(F(p) + \varphi(p))} \le \hat{C}$$

$$\hat{C}^{-1} \le \lambda_j \le \hat{C}$$

[illegible] точке

x - пр-е точки

$$(\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi)(x) \le \log \operatorname{tr}_{g'} g(p) - A\varphi(p)$$

$$\le C_3$$

Каждый λ_i в x допускает оценку $\hat{\hat{C}}^{-1} \le \lambda_i \le \hat{\hat{C}}$