Метрики Кэлера-Эйнштейна

6 ноября 2020 г. 13:02

(M, ω) – кэлерово

ω – метрика KE, если $Ric(\omega) = \lambda\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$R_{a\bar{b}} = \lambda g_{a\bar{b}}$

$\Gamma^a_{bc} = g^{a\bar{s}} \partial_b g_{c\bar{s}}$

w.l.o.g. $\lambda = 1, 0, -1$

$R_{a\bar{b}} = -\partial_{\bar{b}} \Gamma^c_{ac}$

Случаи:

$$\begin{cases} 1.)\ Ric(\omega) = -\omega \\ 2.)\ Ric(\omega) = 0 \\ 3.)\ Ric(\omega) = \omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} [Ric(\omega)] = -[\omega] \\ [Ric(\omega)] = 0 \\ [Ric(\omega)] = [\omega] \end{matrix}}$$

и $[Ric(\omega)] = 2\pi c_1(M)$

Пример: $M = T^{2k} \times \mathbb{C}P^n$

$$c_1(M) = \underbrace{c_1(T^{2k})}_{=0} + \underbrace{c_1(\mathbb{C}P^n)}_{>0} \geq 0$$

$$c_1^{n+k}(M) = (c_1(T^{2k}) + c_1(\mathbb{C}P^n))^{n+k} = 0$$

$\Rightarrow$ M не доп. KE с $\lambda \neq 0$.

$c_1^n(M) \neq 0 \Rightarrow$ M не доп. KE

с $\lambda = 0$.

$c\ \lambda = 0.$

$\Rightarrow$ На M нет метрик КЕ.

Д-но, что если $\lambda \leq 0$, то метрика КЕ есть. Но! При $\lambda > 0$ $\exists$ примеры мн-й без метрик КЕ, но $c_1(M) = [\omega]$ для нек. ω кэл.

$[Ric(\omega)] = -[\omega].$

$Ric(\omega) + \omega = i\partial\bar\partial F$, $F \in C^\infty(M)$.

Хотим: $\varphi \in C^\infty(M)$, что

$\omega_\varphi = \omega + i\partial\bar\partial\varphi > 0$ – кэлерова и

- $Ric(\omega_\varphi) = -\omega_\varphi \ (=)$

$\forall \omega \quad Ric(\omega) = -i\partial\bar\partial \log \omega^n =$

$= -i\partial\bar\partial \log \det(g_{a\bar b})$

$(=)\ Ric(\omega) - i\partial\bar\partial\varphi - i\partial\bar\partial F$

$$= \mathrm{Ric}(\omega) - i\partial\bar\partial\varphi \quad \ldots$$

$$\Updownarrow$$

$$-i\partial\bar\partial \log \omega_\varphi^n = -i\partial\bar\partial \log \omega^n - i\partial\bar\partial\varphi - i\partial\bar\partial F$$

$$\Updownarrow$$

$$\log \omega_\varphi^n = \log \omega^n + \varphi + F$$

$$\omega_\varphi^n = \exp(\varphi + F)\,\omega^n \quad (*)$$

$$\det(g_{a\bar b} + \partial_a \bar\partial_b \varphi) = \exp(F+\varphi)\det(g_{a\bar b})$$

$$\Uparrow$$

Ур-е типа Монжа-Ампера

$$\int_M \omega_\varphi^n = \int_M \exp(F+\varphi)\,\omega^n$$

$$\parallel \qquad =$$

$$\int_M \omega^n \Rightarrow F \text{ так, чтобы}$$

$$\int \omega^n = \int \exp(F+\varphi)\,\omega^n$$

$$\int_M \omega^n = \int_M \exp(F+\varphi)\,\omega^n$$

Хотим: Д-ть $\exists$-е и ед. решения для

$$(\omega + i\partial\bar\partial\varphi)^n = \exp(F+\varphi)\,\omega^n \quad (**)$$

Единственность:

φ_1, φ_2, т.ч.

$Ric(\omega_{\varphi_j}) = -\omega_{\varphi_j}$, $j=1,2$

За ω возьмем ω_{φ_1} и $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$

$$(\omega + i\partial\bar\partial\varphi) = e^{\varphi}\omega^n, \text{ т.к.}$$

$$Ric(\omega) + \omega = i\partial\bar\partial F = 0.$$

$p \in M$ - точка max для φ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \partial_a \bar\partial_b \varphi(p) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\omega + i\partial\bar\partial\varphi) \leq \omega \Rightarrow \omega_\varphi^n \leq \omega^n$

$\Rightarrow \omega + i\partial\bar\partial\varphi \leq \omega \Rightarrow \omega_\varphi^n \leq \omega^n$

$\Rightarrow e^{\varphi(p)} = \frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n} \leq 1 \Rightarrow \forall x \in M \quad e^{\varphi(x)} \leq 1$

$\Rightarrow \varphi \leq 0.$

φ — min для $p \Rightarrow \varphi \geq 0.$

$\Rightarrow \varphi = 0.$ $\blacksquare$

Существование:

Рассм-м семейство ур-й

$$(MA_t) \quad \begin{cases} \omega_\varphi^n = \exp(tf + \varphi)\omega^n \\ \omega_\varphi > 0 \quad t \in [0;1] \end{cases}$$

1.) Если для t решение есть, то $\forall$ дост. малых $\varepsilon > 0$ решение

То и дост. малых $\varepsilon>0$ решение есть и для $t+\varepsilon$ (Открытость)

2.) Если решение есть для $\forall s<t$, то оно есть и для t. (Замкнутость)

1.) <u>Открытость!</u>

Рассм-м пр-во $C^{k,\alpha}(M)$-пр-во ф-й с нормой $\|f\|_{C^{k,\alpha}} =$

$$= \sup_M |f| + \ldots + \sup_M |\nabla^k f| + \sup_{x,y\in M} \frac{|\nabla^k f(x) - \nabla^k f(y)|}{\operatorname{dist}(x,y)^\alpha}.$$

Рассм-м $\Phi: C^{3,\alpha} \longrightarrow C^{1,\alpha}$

$$\Phi(\varphi_t) = \log \frac{\omega^n_{\varphi_t}}{\omega^n} - \varphi_t - tF,$$ где

$\Phi(\varphi_t) \quad \omega^n$

φ_t — решение в точке t.

$$\varphi_{t,s} = \varphi_t + s\psi$$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi(\varphi_{t,s}) = \frac{n\, i\partial\bar\partial\psi \wedge \omega^{n}_{\varphi_t}}{\omega^n_{\varphi_t}} - \psi$$

$g_{a\bar b}$ — коэф $\omega + i\partial\bar\partial\varphi_t$

$$g^{a\bar b}\partial_a \partial_{\bar b}\psi = -\Delta\psi$$

$$-\Delta\psi - \psi = 0 \iff -\Delta\psi = \psi$$

у $-\Delta$ с.з. отрицательны

$\Rightarrow$ дифф Φ не имеет ядра.

$\Phi(\varphi_t) = 0 \Rightarrow$ для малых $\varepsilon > 0$

$\Phi(\varphi_{t+\varepsilon}) = 0$ тоже

(имеет решение.

$\varphi(\varphi_{t+\varepsilon}) = \ldots$
имеет решение.

$$\frac{\partial}{\partial z^c}\Big(\log\det(g_{a\bar b} + \partial_a\partial_{\bar b}\varphi) - \log\det(g_{a\bar b}) - \varphi - tF\Big) = 0 \qquad \varphi \in C^{3,\alpha}$$

$L(\partial_c\varphi) = h$, L – эллипт. оператор, h – дост. гладкая ($h \in C^{1,\alpha}$)

$$\Rightarrow \partial_c\varphi \in C^{3,\alpha} \Rightarrow \varphi \in C^{4,\alpha}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \varphi \in C^\infty(M).$$

2.) Замкнутость

<u>Надо:</u>

t_i – посл-ть, $t_i \to t$

a.) $\lim\limits_{t_i\to t} \omega_{\varphi_{t_i}} = \omega_{\varphi_t} > 0$

а.) $\lim_{t_i \to t} \varphi_{t_i} = \varphi_t$

б.) $\varphi_t \in C^{3,\alpha}$

Для этого нам нужны оценки на

$\|\varphi\|_{C^0}$, $\cancel{\|\varphi\|_{C^1}}$, $\|\varphi\|_{C^2}$,

$\|\varphi\|_{C^3}$