Неравенство Богомолова-Мияоки-Яу, секционная кривизна

30 октября 2020 г. 12:59

Секц. кривизна кэл. мн-й:

$$K(X,Y) = R(X,Y,X,Y) \Rightarrow$$

X, Y — ортонорм. векторы

$$\Rightarrow \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

зависит только от пл-ти $\mathrm{span}(X,Y)$

Если $K(X,Y) = c = const$ —

не зав. от X, Y и точки.

— не зав. от X, Y и точки,

то тензор кривизны есть

$$R(X,Y,Z,W)=c\left(g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\right)$$

Если мн-е кэлерово:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z^a},\frac{\partial}{\partial \bar z^b},\frac{\partial}{\partial z^c},\frac{\partial}{\partial \bar z^d}\right)=$$

$$= R_{a\bar b c\bar d} \overset{!}{=} R_{c\bar b a\bar d}$$

$$R_{a\bar b c\bar d} = c\left(g_{a\bar d}\, g_{c\bar b}\right) \qquad (*)$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^a},\frac{\partial}{\partial z^c}\right)=g_{ac}=0$$

$$g\left(\frac{\partial}{\ }, \frac{\partial}{\ }\right)=g_{a\bar d}$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^a}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d}\right) = g_{a\bar{d}}$$

$$(*) = c(g_{a\bar{d}}\, g_{c\bar{b}}) \overset{!}{=} c(g_{c\bar{d}}\, g_{a\bar{b}})$$

Домн. на $g^{a\bar{d}} g^{c\bar{b}}$ и свернем

$$c\, g^{a\bar{d}} g^{c\bar{b}} g_{a\bar{d}} g_{c\bar{b}} =$$

$$= c\, g^{a\bar{d}} g^{c\bar{b}} g_{c\bar{d}} g_{a\bar{b}} \quad (**)$$

$$c n^2 = c\, g^{a\bar{d}} \delta^b_d\, g_{a\bar{b}} =$$

$$= c\, g^{a\bar{b}} g_{a\bar{b}} = c n$$

Если $n > 1$, то кэл. метрика не может быть метр. пост. секц. кривизны. В частности пр-во Лобачевского $(\mathbb{H}^{2n}, g)$ не явл. кэлеровым.

Есть ли в кэл. случае разумный аналог секц. кривизны?

Есть!

$$K(X) = \frac{R(X, JX, X, JX)}{|X|^4}$$

Пример:

Пример:

1.) $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ имеет

пост. пол. секц. кр-ну

2.) $(\mathbb{C}^n, \omega_{Flat})$

3.) $U(1,n)/U(1)\times U(n) = B$

с метрикой Бергмана

$$\omega_B = i\partial\bar\partial \log\left(1-\sum_{a=1}^{n}|z_a|^2\right).$$

$$B = \{ z\in\mathbb{C}^n \mid |z|<1 \}$$

$$|z_0|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - \dots$$

Опр.: (M,ω) - многообр-е

Кэлера - Эйнштейна, если
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $Ric(\omega) = \lambda\omega$

Мн-е с пост. гол. секц.
кривизной - мн-е Кэл.-Эйн-
штейна.

(M, g) - риманово и
наз. мн-м Эйнштейна,
если $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Т-ма:</u> (M, ω) - КЭ - мн-е.

Тогда
$$\int (2(n+1)c_2(M) - nc_1^2(M)) \wedge \omega^{n-2} \geq 0$$

M

Ч $\quad$ рав-во $\Longleftrightarrow$ (M,ω) - мн-е пост. гол. секц. кривизну.

<u>Д-во:</u>

1.) $\overset{0}{R}_{a\bar b c\bar d} = R_{a\bar b c\bar d} -$

$$- \frac{\lambda}{n+1}(g_{a\bar b}\, g_{c\bar d} + g_{a\bar d}\, g_{c\bar b})$$

$\overset{0}{Rm} = 0 \Longleftrightarrow (M,\omega)$ - мн-е пост. гол. секц. кривиз.

$$|\overset{0}{Rm}|^2 = |Rm|^2 - \frac{2\lambda^2 n}{n+1} \quad (*)$$

2.) $\operatorname{tr}(\Omega\wedge\Omega) =$

2.) $\operatorname{tr}(\Omega \wedge \Omega) = $

$$\Omega^a_b = R^a_{bc\bar{d}}\, dz^c \wedge d\bar{z}^d$$

$$= 4\pi^2 \left(c_1^2(M) - 2c_2(M) \right)$$

(**) $n(n-1)\operatorname{tr}(\Omega \wedge \Omega) \wedge \omega^{n-2} = ?$

<u>Утв:</u> (M, ω) – кэлерово

α, β – $(1,1)$-формы

Тогда $n(n-1)\alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-2} =$

$$= (\operatorname{tr}\alpha \operatorname{tr}\beta - \langle \alpha, \beta \rangle)\omega^n$$

$$\operatorname{tr}\alpha = g^{a\bar{b}} \alpha_{a\bar{b}}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = g^{a\bar{b}} g^{c\bar{d}} \alpha_{a\bar{d}} \beta_{c\bar{b}}$$

$\langle \alpha , \beta \rangle = g \ldots$

<u>Д-во:</u>

$$\omega = \sqrt{-1} \sum dz^a \wedge d\bar{z}^a$$

$$\alpha = \sqrt{-1} \sum \alpha_a \, dz^a \wedge d\bar{z}^a$$

$$\omega^{n-2} = (n-2)! (\sqrt{-1})^{n-2} \times$$

$$\times \sum_{a<b} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_a \wedge d\bar{z}_a} \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_b \wedge d\bar{z}_b} \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

$$\omega^n = n! \sqrt{-1}^n dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$$

$$n(n-1) \alpha \wedge \alpha \wedge \omega^{n-2} =$$

$$= n! \sqrt{-1}^n \sum_{a<b} \alpha_a \alpha_b \, dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n =$$

$$= \left(\left(\sum_{a=1}^n \alpha_a \right)^2 - \sum_{a=1}^n \alpha_a^2 \right) \omega^n =$$

$$=\Big(\sum_{a=1}\lambda_a\Big) - \sum_{a=1} \ldots$$

$$=\big((\operatorname{tr}\alpha)^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle\big)\,\omega^n$$

$\square$

$$(**) = n(n-1)\operatorname{tr}(\Omega \wedge \Omega)\,\omega^{n-2} =$$

$$= n(n-1)\,\Omega^a_b \wedge \Omega^b_a \wedge \omega^{n-2} =$$

$$\boxed{\Omega^a_b = R^a_{bc\bar d}\, dz^c \wedge d\bar z^d}$$

$$= \Big(R^a_b R^b_a - g^{p\bar k} g^{l\bar m} R^a_{bp\bar m} R^b_{al\bar k}\Big)\,\omega^n$$

$$= \big(|Ric|^2 - |Rm|^2\big)\,\omega^n =$$

a.) $Ric(\omega) = \lambda\omega$, $|Ric|^2 = \lambda^2 n$

b.) $|Rm|^2 = |Rm^0|^2 + \dfrac{2\lambda^2 n}{n+1}$

$$\lVert Rm \rVert - \lVert \cdots \rVert \quad n+1$$

$$= \left(\frac{\lambda^2 n(n-1)}{n+1} - |Rm^0|^2\right)\omega^n =$$

$$\boxed{(\cdot)\ c_1^2(M)\wedge\omega^{n-2} = \frac{\lambda^2}{4\pi}\omega^n}$$

$$= n(n-1)4\pi^2\left(c_1^2(M) - 2c_2(M)\right)\omega^{n-2}$$

$$= n(n-1)\left(\lambda^2\omega^2 - 2\cdot 4\pi^2 c_2(M)\right)\wedge\omega^{n-2}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 n(n-1)}|Rm^0|^2\omega^n =$$

$$= \left(\frac{\lambda^2\omega^2}{4\pi^2} - \frac{\lambda^2\omega^2}{4\pi^2(n+1)} - 2c_2(M)\right)\wedge\omega^{n-2}$$

$$= \Big(\frac{\lambda\omega}{4\pi^2} \cdots \frac{\cdots}{4\pi^2(n+1)} \cdots$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\frac{\lambda^2\omega}{4\pi^2} - 2c_2(M)\right)\wedge\omega^{n-2}$$

$$\int_M \left(\frac{n}{n+1}c_1^2(M) - 2c_2(M)\right)\wedge\omega^{n-2}$$

$$= -\int_M \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)}|Rm^0|^2\omega^n \le 0$$

To eva

$$\int_M \left(2(n+1)c_2 - nc_1^2\right)\wedge\omega^{n-2} \ge 0$$

$\blacksquare$