Кэлеровы многообразия: базовые факты

23 октября 2020 г. 12:56

(M,ω) – кэлерово

$h = g - i\omega$. Из ω и J можно восстановить g.

$d\omega = 0$.

Т-ма:

I (M,g) – комп. ориент. риманово м-е, $* : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k}$

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^k(M,\mathbb{R})$ $\alpha \wedge *\beta = \langle\alpha,\beta\rangle dV_g$.

$\Delta_d = \{d, d^*\} = dd^* + d^*d$, $d^* = \pm *^{-1} d *$

Тогда $\operatorname{Ker} \Delta_d\big|_{\Lambda^k}$ конечномерно

и $\operatorname{Ker} \Delta_d \cong H^k(M,\mathbb{R})$.

II $d = \partial + \bar\partial$, (M,ω) – кэл.

$* : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{n-p,n-q}$

и $\alpha \wedge *\bar\beta = \langle\alpha,\beta\rangle dV_g = \langle\alpha,\beta\rangle \frac{\omega^n}{n!}$

$dV_g = \frac{\omega^n}{n!}$

– Т...

$\bar\partial^* = -*\partial*$ и $\Delta_{\bar\partial} = \{\bar\partial, \bar\partial^*\} =$
$= \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$.

Тогда:

(a) $\operatorname{Ker}\Delta_{\bar\partial}$ конечномерно и изоморфно $H^{p,q}(M) =$
$= \dfrac{\operatorname{Ker}\bar\partial|_{\Lambda^{p,q}}}{\operatorname{Im}\bar\partial|_{\Lambda^{p,q-1}}}$.

(b) $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial$
и $\Delta_d = \Delta_{\bar\partial} + \Delta_\partial$.

Более того,
$$H^k(M,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

(c) $d^c := i(\bar\partial - \partial) = JdJ^{-1}$

На любом комп. кэлеровом мн-и всякая точная форма dd^c точна ...

мн-и гладкая точная

форма dd^c-точна, т.е.

если $\alpha = d\beta$, то $\exists \gamma$:

$\alpha = dd^c \gamma$.

<u>Пример:</u> Это неверно на

$S^3 \times S^1$.

(M, ω) – кэлерово

∇ – связность Леви-Чивита.

<u>Т-ма:</u> Кэлеровость экв.

любому из след. усл-й:

1.) $\nabla J = 0$ $\qquad \omega(X,Y) = g(JX,Y)$

2.) $\nabla \omega = 0$

3.) В окр-ти любой точки z_0

$\exists$ координаты, т.ч.

$\exists$ координаты, т.ч.

$$\omega = i g_{j\bar k}\, dz^j \wedge d\bar z^k =$$

$$= i\left(\delta_{jk} - \frac{1}{4} R_{j\bar k l \bar m} z^l \bar z^m + \bar o(|z|^2)\right)$$

$dz^j \wedge d\bar z^k$.

крив. ∇

Если ∇ — любая св-ть без кручения, то $\forall \alpha \in \Lambda^k(M)$ $Alt(\nabla\alpha) = d\alpha$.

$$\nabla\alpha \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^k > \Lambda^{k+1}$$

$E \to M$ — гол. векторное рассл.

$\{g_{\alpha\beta}\}$ — скл. коцикл $\{U_\alpha\}$, то E голоморфно $\iff$ $g_{\alpha\beta}$ — гол. ф-и (со зн. $GL_r(\mathbb{C})$) на $U_\alpha \cap U_\beta$

s — сечение E

s_α на U_α, т.ч.

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta.$$

$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$.

$$\bar\partial s_\alpha = \bar\partial(g_{\alpha\beta} s_\beta) = g_{\alpha\beta}\bar\partial s_\beta.$$

Если $\bar\partial s = 0$, то s голоморфно.

<u>Т-ма (Черн):</u> На (E,h) $\exists!$ h — метрика
∇^c — унитарная связность, т.ч.

$$\nabla^c h = 0$$

$$(\nabla^c)^{0,1} = \bar\partial$$

$$\nabla^c = d + A = (\partial + A^{1,0}) + (\bar\partial + \cancel{A^{0,1}})$$

$$A^{1,0} = h^{-1}\partial h$$

$$h^{a\bar b}\partial_\gamma h_{d\bar b} = A^a_{\gamma d}$$

$$F = dA + A\wedge A =$$

$$= \cancel{\partial A^{1,0}} + \bar\partial A^{1,0} + \cancel{A^{1,0}\wedge A^{1,0}}$$

$$= \cancel{\bar\partial} A + \partial A + \cancel{A}\wedge A$$

$$\underline{A^{1,0}\wedge A^{1,0}} = h^{-1}\partial h \wedge h^{-1}\partial h$$

$$\partial A^{1,0} = \partial h^{-1}\wedge \partial h =$$

$$= \underline{-h^{-1}\partial h \wedge h^{-1}\partial h}$$

$$\Rightarrow F = \bar\partial(h^{-1}\partial h)$$

∇ – связность Л.-Ч.

на $TM\otimes\mathbb{C} = \underline{T}^{1,0}\oplus T^{0,1}$

Связность Леви-Чивита совпад. со св-ю Черна на $T^{1,0}$

$$\Gamma^{i}_{jk} \quad \text{и} \quad \Gamma^{\bar i}_{\bar j\bar k}$$

$$\Gamma^a_{bc} = \underline{g^{a\bar s}\partial_b} g_{c\bar s} \qquad \partial_b = \frac{\partial}{\partial z^b}$$

$$\Gamma^{\bar a}_{\bar b\bar c} = \overline{\Gamma^a_{bc}} \qquad \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$$

$$\Gamma^{\bar a}_{\bar b \bar c} = \overline{\Gamma^{a}_{bc}}. \qquad \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} = 0$$

$$\boxed{R^a_{b\bar c d} = \partial_{\bar c} \Gamma^a_{db}}$$ $\Longleftrightarrow$ к. эл. метрика

Все ост. комп. равны нулю.

$$R^{\bar a}_{\bar b c d} = 0$$

$$R = R^a_{b\bar c d}\, d\bar z^c \wedge dz^d.$$

Симметрии:

1.) $R^a_{b\bar c d} + \cancel{R^a_{\bar c d b}} + R^a_{d b \bar c} = 0$

$$R^a_{b\bar c d} = R^a_{d\bar c b}$$

2.) $\nabla_e R^a_{b\bar c d} + \cancel{\nabla_{\bar c} R^a_{bde}} + \nabla_d R^a_{be\bar c} = 0$

$$\nabla_e R^a_{b\bar c d} = \nabla_d R^a_{b\bar c e}$$

$$\nabla_e R^a{}_{b\bar c d} = \nabla_d R^a{}_{b\bar c e}$$

3.)

$$R_{\bar a b \bar c d} = R_{\bar c d \bar a b}$$

$$\overline{R_{\bar a b \bar c d}} = R_{a \bar b c \bar d}$$

$$R_{\bar a b \bar c d} = -R_{\bar a b d \bar c}$$

$$\|$$

$$R_{b \bar a \bar c d}$$

<u>Тензор Риччи:</u>

$$R_{b\bar c} = R^a{}_{b a \bar c} = -R^a{}_{b \bar c a} =$$

$$= -\partial_{\bar c}\Gamma^a_{ba}$$

$$\Gamma^a_{ba} = g^{a\bar s}\partial_b g_{a\bar s} =$$

$$\Gamma^a_{ba} = g^{a\bar s}\,\partial_b g_{a\bar s} =$$

$$= \frac{\partial_b \det g}{\det g} = \partial_b \ln\det g.$$

$$\boxed{R_{b\bar c} = -\partial_{\bar c}\partial_b \ln\det g.}$$

$$Ric(\omega) = i R_{b\bar c}\, dz^b \wedge d\bar z^c = \underline{-i\partial\bar\partial \ln\det g}$$

$$Ric(\omega) = Ric(J\cdot,\cdot)$$

Утв.:

1) $d\,Ric(\omega) = 0$

2) $[Ric(\omega)] = 2\pi c_1(M)$

Д-во:

2) $c_1(M) = \frac{1}{2\pi i} R^a_{a b\bar c}\, dz^b \wedge d\bar z^c = -$

$$-\frac{1}{2\pi i} R^a_{ba\bar c}\, dz^b \wedge d\bar z^c = \frac{i R_{b\bar c}}{2\pi}.$$

$$c_1(E) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{tr}(F).$$

$$c_1(M) = c_1(\Lambda^n T^{1,0}_M).$$

g — кэл. метрика, то

$$h(s,s) = e^{-f} |s|^2.$$

h — метрика на $\Lambda^n T^{1,0}_M$ — это $\det g |s|^2$

Кривизна на $\Lambda^n T^{1,0}_M$ — это $-i\partial\bar\partial \ln \det g$.

Метрика на $\Lambda^n T^{1,0}_M$ — это
сечение $\Omega \in \Lambda^{n,n}(M)$.

$\rho = -i\partial\bar\partial \ln \Omega$ — кривизна
на $\Lambda^n T^{1,0}_M$.

$[\rho] = 2\pi c_1(M)$.

Наоборот, любая форма
$\frac{\rho}{2\pi} \in c_1(M)$ получается
локально как $-i\partial\bar\partial \ln \Omega$

$\Omega = e^{-f}\omega^n$, где f

$\rho - Ric(\omega) = i\partial\bar\partial f = \frac{1}{\ } dd^c f$

$\rho - \mathrm{Ric}(\omega) = \underbrace{i\partial\bar\partial f} = \frac{1}{2} d d^c f$

Вопрос: Будет ли ρ формой Риччи для нек. кэл. метрики

Ответ: да. (Т-ма Калаби Яу).