Единственность CP^n

16 октября 2020 г. 12:54

Теорема 1: M – компактное, комплексное и кэлерово многообразие, которое гомеоморфно $\mathbb{C}P^n$. Тогда оно биголоморфно $\mathbb{C}P^n$.

На всяком компл. мн-ве $\exists$ эрмитова метрика. h – эрм. метрика на M.

$$h(X,Y) = \underbrace{g(X,Y)}_{\text{вещ. часть}} - \sqrt{-1}\,\underbrace{\omega(X,Y)}_{\substack{\text{мнимая} \\ \text{(кэл. форма)}}}$$

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y)$$, J – оператор компл. стр-ры.

Опр.: Метрика h кэлерова, если $d\omega = 0$.

$f: M \to N$ – голом. отобр-е.

компл.

если:

1.) в коорд. f записывается гол. ф-ми

2.) J_M, J_N – компл. стр-ры

1.) ∃ гобр. f запис...
$\Updownarrow$ 2.) J_M, J_N — комплекс. стр-ры
Тогда $df\circ J_M = J_N\circ df$, df — дифф.

f биголоморфное, если f голом., диффеом. и f^{-1} тоже голоморфно.

<u>Опр</u>: Комплексной поверхностью называется компл. мн-е комплексной размерности 2 (вещ. разм. 4)

<u>Примеры п-й</u>:
1.) $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$
2.) $\mathbb{C}^2/\Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^4$

N.B.: В общем случае многообр-е могут быть диффеоморфны, но не биголоморфны.

3.) $\mathbb{CP}^2$ и гиперпов-ти в $\mathbb{CP}^3$
4.) $S^3\times S^1 \cong \mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{Z}$ $\quad z\in\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$, $z\mapsto 2z$.

"поверхность Хопфа"
и это некэлерова поверхность.

$$\omega^n = n!\, Vol_g = n!\sqrt{\det g}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{2n}$$
$\Rightarrow [\omega^n]\neq 0 \quad \therefore \quad [\omega^k]\neq 0.$

$\omega^n = n!\, Vol_g = n! \sqrt{\det g} \ldots$

$\Rightarrow \int_M \omega^n \neq 0$ и $[\omega^k] \neq 0.$

Теорема: M - комплексная пов-ть (не обязательно кэлерова), гомотоп. эквивалентная $\mathbb{C}P^2$. Тогда $M \underset{\text{бигол.}}{\cong} \mathbb{C}P^2$

Схема д-ва Т-мы 1:

Шаг 0: Мы можем показать, что

$H^2(M, \mathbb{C}) = H^{1,1}(M) = \underset{\langle\omega\rangle}{\mathbb{C}}.$

а.) M проективно

б.) $\chi(M, \mathcal{O}) = 1.$

$h^{p,0} = \dim \{$пр-во голом. p-форм т.е. $\Omega = \sum f_I dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p}\}$

Тогда

$$\chi(M, \mathcal{O}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h^{p,0}.$$

Шаг 1: M - гомеоморфно $\mathbb{C}P^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в когом. M, т.е. в $H^*(M, \mathbb{Z})$ нет кручения.

Теорема Новикова:

Рац. класса Понтрягина у M и $\mathbb{C}P^n$ совпадают.

Нужна для Римана-Роха

Шаг 2: $f: M \to \mathbb{C}P^n$ – гомеоморфизм

a – обр. в $H^2(\mathbb{C}P^n)$.

Тогда можно считать, что $f^* a = \pm[\omega]$

$\text{" } Td_n(M)$

Риман-Рох: $\exists$ полином $Td_n(c_1(M), \ldots, c_n(M))$,

т.ч. $\chi(M, \mathcal{O}) = \int_M Td_n(M)$.

Добавление:

$$Td(M) = \sum_n Td_n(M)$$

$$Td(M) = \exp\left(\frac{c_1(M)}{2}\right) \hat{A}(M), \text{ где}$$

$$\hat{A}(M) = \sum_n \hat{A}_n(p_1(M), \ldots, p_{[\frac{n}{2}]}(M))$$

$$p(\mathbb{C}P^n) = p_1(\mathbb{C}P^n) + \ldots + p_{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{C}P^n) = (1+a^2)^{n+1}$$

$$\_(M) = (1+[\omega]^2)^{n+1}.$$

$$p(M) = (1+[\omega]^2)^{n+1}.$$

Поэтому $\hat{A}(M) =$ Полином от ω^2.

<u>Шаг 3</u>: разбираемся с $c_1(M)$.

Надо найти λ: $c_1(M) = \lambda[\omega]$.

С помощью Римана-Роха мы можем показать, что $\lambda = \pm(n+1)$.

<u>Шаг 4</u>: Если $\lambda = n+1$, то тогда $\exists$ обильное гол. лин. рассл-е $L \to M$

$\dim H^0(M, L) = n+1$.

<u>Т-ма (Кобаяши, Очиаи):</u>

M - компл-е и $L \to M$ гол. лин. р-е обильное, что $\int_M c_1(L)^n = 1$ и $\dim H^0(M, L) = n+1$.

Тогда $M \cong \mathbb{C}P^n$.

Все было сделано Кодаирой и Хирцебр.

Шаг 5: $\lambda = -(n+1)$.

Тогда по Т-ме Яу и Обэна

$\exists!$ кэл. метрика $\omega_{KE} \in -c_1(M)$

$Ric(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}$.

Важное нер-во:

$$(*) \int_M 2(n+1)\, c_2(M) \wedge \omega_{KE}^{n-2} - \int_M n c_1^2(M) \wedge \omega_{KE}^{n-2} \geq 0$$

и равенство $\Leftrightarrow$ ω_{KE} имеет пост. гол. секц. кривизну.

$$k(X) = R(X, JX, X, JX).$$

Через классы Понтрягина мы можем найти $c_2(M)$

и показать, что $(*)$ в нашем случае будет равенством.

$\Rightarrow$ гол. секц. кривизна огран.

$\Rightarrow$ Т.к. M односвязно, то

$$M \cong B^n \subset \mathbb{C}^n.$$

Противоречие. $\blacksquare$

Теорема 2 (д-во):

- Надо показать, что в предп. т-мы 2 M кэлерово и проективно.

Способ 1	Способ 2:
• Из классификации кодаиры компл. n-й	• Т-ма Бухдаля и Ламари: n-ть с $b_1(M) = 2k$ кэлерова.

P.S.: В т-ме 1 видимо нельзя (пока) отказаться от кэлеровости.

Но можно заменить гомеоморфизм

не гомотоп. эквив. при $n \leq 6$.

P.P.S. можно попр. посмотреть
на "фейковые" $\mathbb{C}P^2$.

$h^{p,q}$.

1.) Базовые факты из кэл. геометрии.

23.10.20.

а.) Свойства тензора кривизны

б.) Связь $c_1(M)$ с тензором Риччи

в.) (?) Базовые напоминания про теорию Ходжа. (только форм.)