The Mostow Rigidity Theorem

Nikolay Bogachev (Skoltech & MIPT)

Лекция 5

(I) Напоминание + план док-ва (часть 1)

Компактные гиперб. многообразие $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = PO_{n,1}$ torsion-free uniform (cocompact) lattice

и $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, если $\Gamma < PO_{n,1}$ lattice torsion-free $\xrightarrow{\text{Haar measure}} \mu(PO_{n,1}/\Gamma) < +\infty$

Здесь $\Gamma = \pi_1(M)$.

Теорема жесткости Мостова (верна и для $\mathrm{vol}(M_1) < +\infty$, $\mathrm{vol}(M_2) < +\infty$)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ – компактные гиперб. мн-я.

Пусть $n \geq 3$. Тогда

$$\underset{\text{homeo (A)}}{M_1 \approx M_2} \Leftrightarrow \underset{\text{абстр. группы (B)}}{\Gamma_1 \simeq \Gamma_2} \Leftrightarrow \underset{\text{(C)}}{\exists g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) : g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2} \Leftrightarrow \underset{\text{(D)}}{M_1 \text{ и } M_2 \text{ изометричны}}$$

(E) $M_1 \overset{h}{\simeq} M_2$ – гомот. экв.

$D \Rightarrow A \Rightarrow E \Rightarrow B.$

(1) $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ – комп. гип. мн-я. Пусть $\Gamma_1 \overset{\varphi}{\simeq} \Gamma_2$. Тогда $\exists$ (гладкая) гомотопия $f : M_1 \to M_2$, которая поднимается до Γ_1-эквивариантной псевдоизометрии $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$.

т.е. $B \Rightarrow E(!)$

φ–эквив

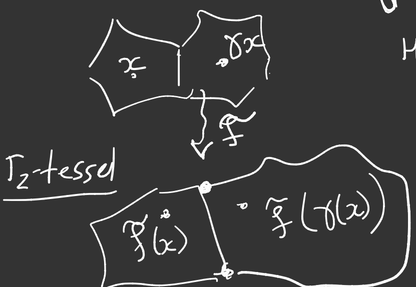
Γ_1–эквив.: $\tilde{f}(\gamma x) = \varphi(\gamma) \cdot \tilde{f}(x)$.

(т.е. $\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$)

$\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ – изоморфизм.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}^n \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \varphi(\gamma) \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}^n \end{array}$$

Γ_1-tesselation



Вспоминаем диаграмму:

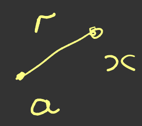
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \underset{\tilde{g}}{\overset{\tilde{f}}{\rightleftarrows}} & \mathbb{H}^n \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 & \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2 \end{array}$$

(2) $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \xrightarrow[\text{isom}]{\text{pseudo}} \mathbb{H}^n \rightsquigarrow \tilde{f} : \overline{\mathbb{H}^n} \xrightarrow{\text{Непр.}} \overline{\mathbb{H}^n}$, т.что

(boundary map) $\partial\tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial\mathbb{H}^n \approx S^{n-1}} : \partial\mathbb{H}^n \underset{\text{homeo.}}{\xrightarrow{\approx}} \partial\mathbb{H}^n$

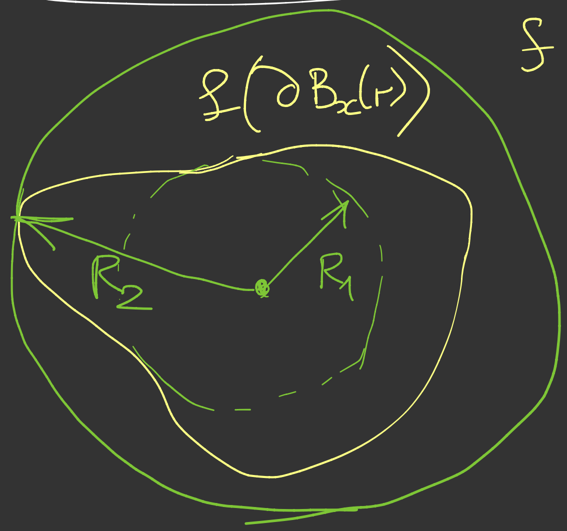
(3) $\partial\tilde{f} : \partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n$ квази конф и $\partial\tilde{f} \in C^1(\partial\mathbb{H}^n)$ п.в.

③ Boundary map $\partial \tilde{f}$ is quasi-conformal:



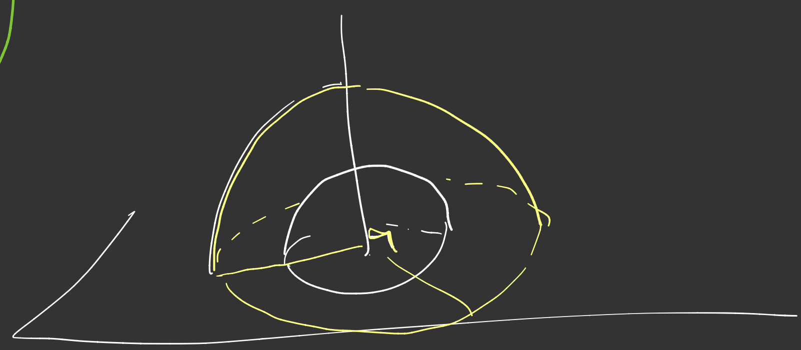
Опр 3 $f: X \to Y$ явл. C-квази-конф., если

$$\forall x \in X \quad \lim_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{a \in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)}{\inf\limits_{a \in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)} \leq C$$



f - quasi-conf, если $\exists C>0$

$$\lim_{r \to 0} \frac{R_2}{R_1} \leq C.$$



III Часть 2: пункты ④-⑧

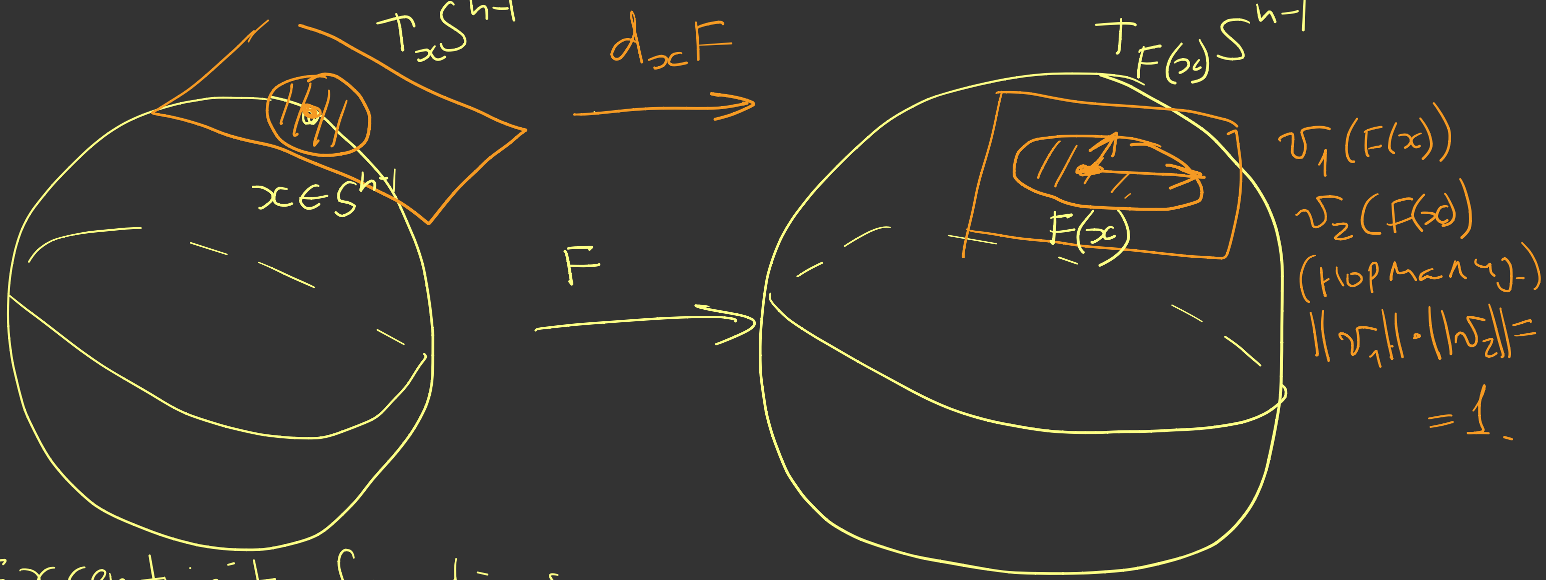
④ $\partial \tilde{f}$ дифференцируемо почти всюду.

Теор. Пусть $n \geq 3$. Тогда quasi-conf homeo $F: S^{n-1} \to S^{n-1}$ явл. дифф. п.в. Более того, d_xF равн. огр., т.е. $\exists \lambda > 1: \forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$ и $\forall v \in T_x S^{n-1}$

$$1/\lambda \leq \frac{\| d_x F(v) \|}{\| v \|} \leq \lambda$$

Замечание При $\boxed{n=2}$ не выполнено усл-е про d_xF.

А именно, $\exists$ гомеоморфизмы S^1: $d_xF \equiv 0$.



Excentricity functions

$$e_F(x) = \max_{\substack{i \neq j \\ i,j = 1,\dots,n-1}} \left\{ \frac{\|v_i(F(x))\|}{\|v_j(F(x))\|} \right\} \quad \forall \text{ п.в. } x \in S^{n-1}.$$

Заметим, что $e_F(\gamma x) = e_F(x)$ $\forall \gamma \in \Gamma_1 = \pi_1(M_1)$

5 Dynamics and ergodic theory (!!)

Ссылка: Богачев В.И. "Основы теории меры, Vol 2"

Опр. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — a measure space.
$\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Тогда измер. отобр. $T: X \to X$ наз. сохр. меру, если $\mu \circ T^{-1} = \mu$ (т.е. $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$).

Такое отобр. назыв. эргодическим, если T-инв подмн-ва либо меры 0, либо полной меры. То есть:

$$T(E) = E \Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ или } \mu(X \setminus E) = 0 \quad \forall E \subset X.$$

Предл. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пр-во с кон. мерой (вероятн.).
Тогда $T: X \to X$ эргодично $\Leftrightarrow$ $\forall$ T-инв $f \in L^1(X)$ верно $f \equiv \text{const}$.

Теорема (Birkhoff - Khinchin Ergodic Theorem)

(1) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - вероятн пр-во и $T: X \to X$ - сохр.меру отобр.

Пусть f - μ-изм. функция. Тогда для μ-п.в. $x \in X$

$\exists$ предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \bar{f}(x)$.

Более того, $\bar{f} \in L^1(\mu)$ и $\int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X \bar{f}\, d\mu$.

(2) Если к тому же T - эргодическое, то

$$\bar{f} \equiv c \quad \text{и} \quad \int\limits_X \bar{f}\, d\mu = c = \int\limits_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

Опр. Геодезические потоки и мера Лиувилля

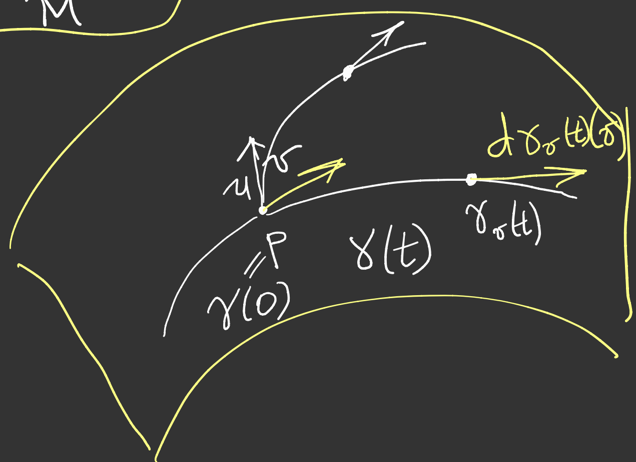
1) Пусть M - хорошее (полное) риманово мн-е и пусть T^1M. Тогда $\forall v \in T^1M$

γ_v - кривая со скор v. $\boxed{\text{Геодез. поток на } T^1M}$ - 1-парамер. семейство

$g_t : T^1M \to T^1M$

$(p, v) \xmapsto{g_t} (\gamma_v(t); d\gamma_v(t)(v))$

где $\gamma_v(0) = p$



2) Мера Лиувилля на T^1M, где $\mathrm{Vol}(M) < +\infty$, это $d\omega = d\mathrm{Vol}_M \, d\theta$, где $d\theta$ - мера Лебега единичной массы на T^1_pM и $\mathrm{Vol}(M) = 1$.

$d\omega = d\mathrm{vol}_M \wedge d\theta$

Теор (Св-ва меры Лиувилля)

Теор Лиувилля, см. Do Carmo "Riemannian geometry"

a) $d\omega$ – вероятн. мера на T^1M.

b) Геодезические потоки сохраняют меру $d\omega$.

Док-во: (для H^n и $M = H^n/\Gamma$). a) Очевидно

b) $\tau_\gamma(t)$ – изометрия в H^n (гиперб. сдвиг), $d\tau_\gamma(t)$ – невырожд. оператор. $\Rightarrow \boxtimes$

Для H^n/Γ пользуемся тем, что $H^n \to H^n/\Gamma$ – лок. изом $\boxtimes$

Теор. (Хопф '1940, для $K \equiv -1$, Аносов '1967 для $K < 0$)

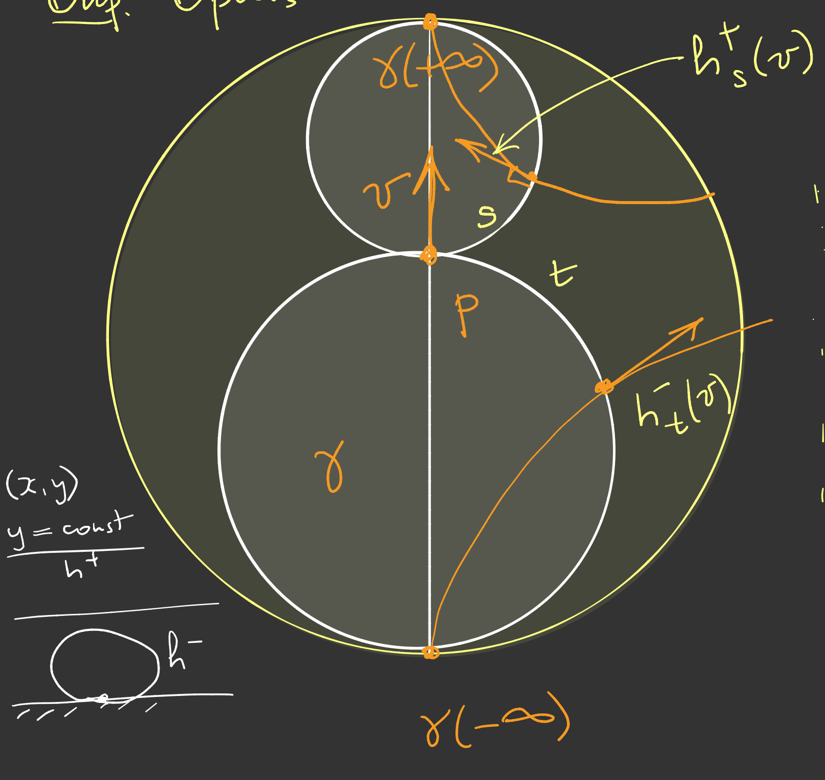
Пусть $M = H^n/\Gamma$ – полное связное гиперб мн-ие конечн. объема.

Тогда геодез. поток на T^1M явл. эргодическим по мере Лиувилля.

Док-во: (для $n=2$) В этом случае $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(H^2) = PSL_2(\mathbb{R})$

Пов-ть $M = H^2/\Gamma$ – lattice по мере Хаара

Опр. Орициклические потоки



Более того, эта мера Хаара на группе Ли $PSL_2(\mathbb{R})$ индуцирует единств. лок-кон. меру на $T^1(M) \simeq \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$

Тогда геодезический поток на $T^1(H^2/\Gamma)$ совп. однопар. подгр:

$$g^t(\Gamma v) = \Gamma v \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

А здесь имеем:

$$h_s^+(\Gamma v) = \Gamma v \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_t^-(\Gamma v) = \Gamma u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Тут прикол в том, что $T^1(H^2) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$ и g_t на T^1H^2:

$$g^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что $\begin{cases} g_s h_t^+ g_{-s} = h^+_{te^{-s}} \xrightarrow{s\to+\infty} Id \\ g_{-s} h_t^- g_s = h^-_{te^{s}} \xrightarrow{s\to-\infty} Id \end{cases}$

В частн., $g_s h_t^+ = h^+_{te^{-s}} \circ g_s$

Остается показать, что если всякая g_t-инвар. функция $f \in L^2$ будет также h_t^+- и h_t^--инв, то победа, поскольку

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \right\rangle$$ и при этом

всякая $PSL_2(\mathbb{R})$-инв функция на $PSL_2(\mathbb{R})/_\Gamma$ есть const.

1. Итак, если $f \in L^2$, то $f \circ h^+_{te^{-s}} \xrightarrow[L^1]{s\to+\infty} f$. Действ., можно аппроксимировать фун-ми с компактным supp + использовать тот факт, что $h^+ \in \mathrm{Isom}(L^1)$.

2. Если $f \in L^2$ и $f \circ g_s = f$, то $f \circ h_t^- = f$ и $f \circ h_t^+ = f$.

Действительно, $\|f \circ h_t^+ - f\|_{L^1} = \|f \circ g_s \circ h_t^+ - f\|_{L^1} =$

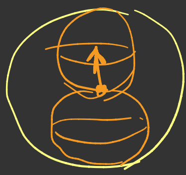
$$= \|f \circ h^+_{te^{-s}} \circ g_s - f g_s\|_{L^1} = \|f \circ g_s \circ h_t^+ - f \circ g_s\|_{L^1} \xrightarrow{s\to+\infty} 0$$

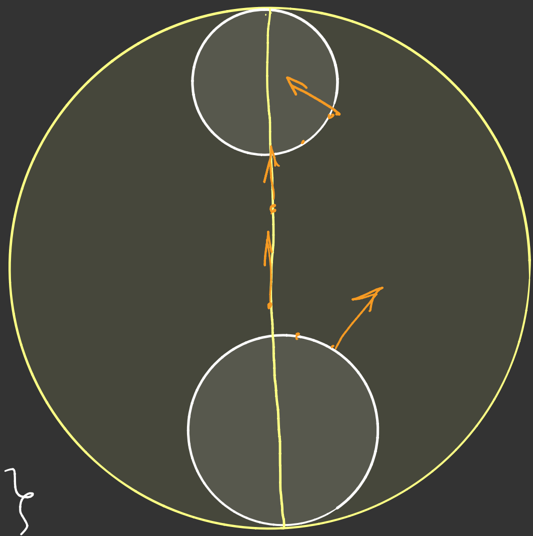
Причем,

$$\rho(g_s h_t^+(v), g_s(v)) = \rho(h^+_{te^{-s}}(v) g_s(v), g_s(v)) = te^{-s} \to 0$$

$$\int |f g_s h_t^+(u) - f \circ g_s(u)|^1 du \to 0 \Rightarrow f \circ h_t^+ = f.$$

$n \geq 2$ (Идея).





$$W^+(u) = \{ g_s h_t^+(u) \mid s,t \in \mathbb{R} \}$$

$$W^-(v) = \{ g_s h_t^-(v) \mid s,t \in \mathbb{R} \}.$$

Или

$$W^+(u) = \{ v \mid \rho(g_t(u), g_t(v)) \xrightarrow{t\to+\infty} 0 \}$$

$$W^-(u) = \{ v \mid \rho(g_t(u), g_t(v)) \xrightarrow{t\to-\infty} 0 \}.$$

Пусть $f \in L^1(T^1M)$ или $L^2(T^1M)$

Рассм, $f^+(v) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_t(v))\,dt$; $f^-(v) = \lim\limits_{T} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(g_t(v))\,dt$

Можно доказать, что $f^+(v) = f^-(v)$. Надо д-ть $\forall f \in L^1$ $f^+ \equiv const$ п.в.

М. сч., что supp(f) — компакт. Далее,

шаг 1: f^+ и f^- постоянны вдоль h^+ и h^-, т.е. $f^+(v) = f^+(h_s^+(v))$.
Поскольку $f^+(g_t v) = f^+(v)$ то $f^+ \equiv const$ на $W^+(u)$.

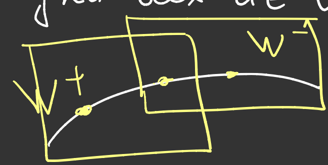
шаг 2: Пусть $\omega(U)$ - мера Лиувилля мн-ва $U \subset T^1M$.

Тогда $\omega(\{ h_s^+ g_t h_a^-(u) \mid s,t,a \in \mathbb{R}\}) =$
$= \omega(\{ h_a^- g_t h_s^+(v) \mid s,t,a \in \mathbb{R}\}) = 1$.

Т.е. имеем $(s,t,a) \longmapsto h_s^+ g_t h_a^-(u) \in T^1M$ с мерой $ds\,dt\,da \sim d\omega$

Иными словами, $\exists\, U \subset \mathbb{R}$ т.ч. $\mu(\mathbb{R}\setminus U) = 0$ и $f^+(h_u^-(v))$ и $f^-(h_u^+(v))$ сущ. для всех $u \in U$.

Осталось заметить, что для всех $u \in U$:

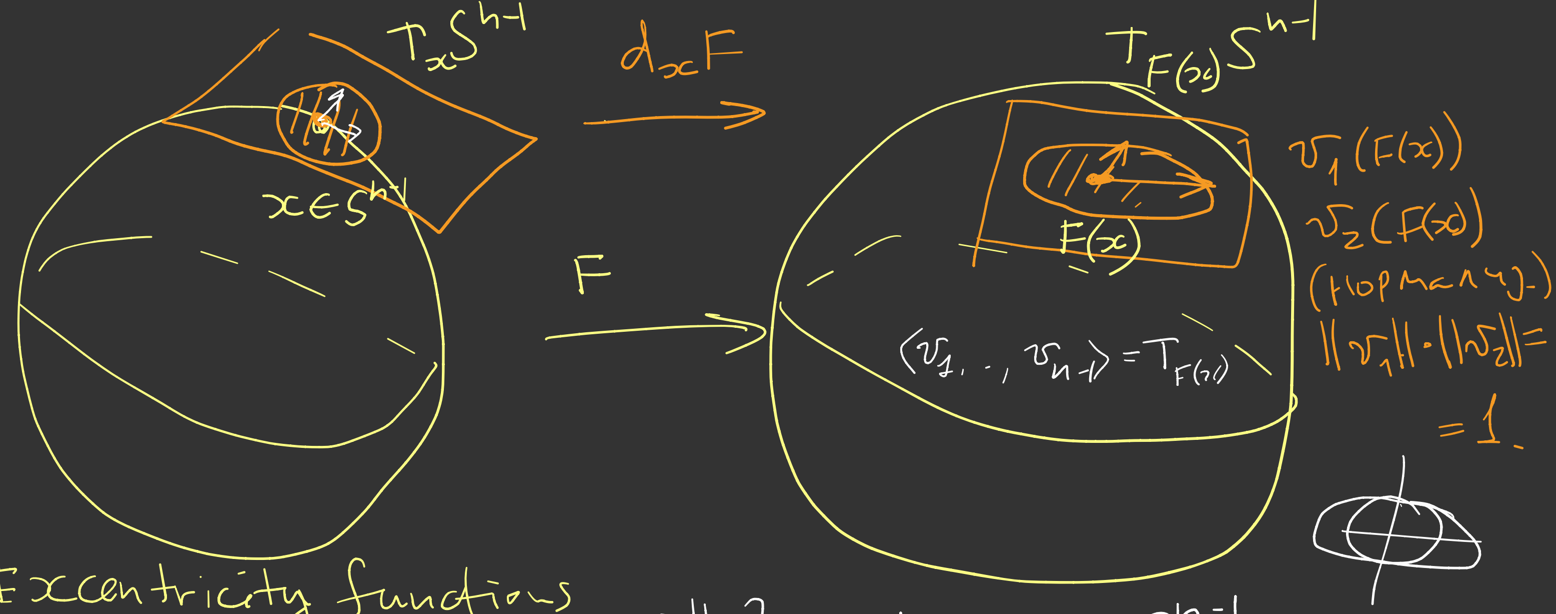


$f^+ \equiv const$ на $W^+(h_u^-(v))$ и $\exists$ на $W^-(h_u^+(v))$

$f^- \equiv const$ на $W^-(h_u^+(v))$ и $\exists$ на $W^+(h_u^-(v))$ и $\forall u_1, u_2 \in U$:

$$f^+(h^-_{u_2}(v)) = f^-(h^-_{u_2}(v)) \underset{f^-\ \text{const вдоль}\ h^-}{=} f^-(h^-_{u_1}(v)) = f^+(h^-_{u_1}(v)) \Rightarrow f^+ \equiv const \text{ п.в.} \quad \blacksquare$$

Теор А. Действие $\Gamma_1 \curvearrowright S^{n-1}\times S^{n-1}$ эргодично, т.е. $\Gamma_1 \curvearrowright S^{n-1}$ эргодично.



Excentricity functions

$$\boxed{e_F(x) = \max_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,\dots,n-1}} \left\{ \frac{\|v_i(F(x))\|}{\|v_j(F(x))\|} \right\}}$$

$\forall$ п.в. $x\in S^{n-1}$.

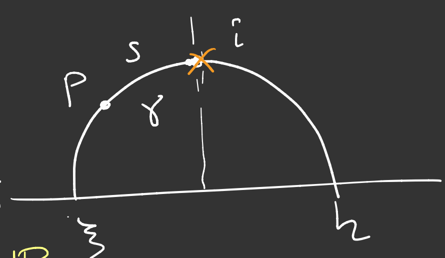
Нам d_xF тогда $e_F(x)$ Q Conf.

Из предыдущей теор. след., что $e_F \equiv const$ п.в.

Лемма На самом деле, $e_F \equiv 1$ п.в. и, значит, dF — conf.

Теор В Если $F: S^{n-1}\to S^{n-1} \in QConf$ и $dF \in Conf \Rightarrow F\in Conf$.
(без док-ва).

Док-во Теор А:



Пусть $v\in T^1_pH^n$, $\gamma_v=\gamma$, $\gamma(-\infty)=\xi$, $\gamma(+\infty)=\eta$

и $\rho(p,i)=s$. т.е. $v\mapsto(\xi,\eta,s)$. $\underset{\displaystyle D}{\{(\xi,\xi)\}}$ S^{n-1}_1

$$T^1H^n \longrightarrow \left((S^{n-1}\times S^{n-1})\setminus D\right)\times\mathbb{R}$$

$\exists\ \rho(\xi,\eta)>0$: $d\omega = \rho(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,ds$. Пусть A — Γ_1-инв., $A\subset S^{n-1}\times S^{n-1}$.

Пусть $B = A\times\mathbb{R}$. Тогда B — g_t инв на H^n, B — Γ_1 инв и $g_t|_{M_1} = Proj_{M_1} g_t|_{H^n}$

$(g_t\circ d\gamma = d\gamma\circ g_t)$. Таким обр., $B/_\Gamma = g_t|_{M_1}$-инв. По теор. Хопфа-Аносова,

$\omega(B/_\Gamma)=0$ или $\omega(M_1\setminus(B/_\Gamma))=0$. Если $\omega(B/_\Gamma)=0$, то

$$0 = \omega_{H^n}(B) = \int_B d\omega = \int_B \rho(\xi, h)\, d\xi\, dh\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \rho(\xi, h)\, d\xi\, dh = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0. \qquad \boxed{\text{Ч.т.д.}}$$

Док-во леммы: Основано на том, что не существует Γ_1-инв измеримого реперного/базисного поля на на $T S^{n-1}$.
frame field

Если $e_F \equiv c > 1$ п.в., то $\exists$ поле $\{(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))\}$ на $T_x S^{n-1}$

Заметим, что $F \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ F$ и $v_i(\gamma x) = d\gamma(v_i(x))$. (Измер-ть? использует $c > 1$)

Пусть $\|v_1(x)\| < \dots < \|v_{n-1}(x)\|$ $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$.

Тогда это поле Γ_1-инв. и измеримо. (что если $\|v_2\| = \|v_3\|$?)

Пусть теперь сущ Γ_1-инв поле на $T S^{n-1}$: $(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))$

Идея: взять $x \neq -y$ и парр. перенос вдоль геод

$P_{yx}: T_y S^{n-1} \to T_x S^{n-1}$. Опр-м ф-ции $\varphi_{i,j}: T_p S^{n-1} \times T_p S^{n-1} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \langle v_i(x), P_{yx}(v_j(y)) \rangle$

Далее, $\Gamma \curvearrowright S^{n-1} \times S^{n-1}$ эрг $\Rightarrow \varphi_{ij} \equiv \text{const}$ п.в. $\Rightarrow v_i(x)$ опред $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$

Пусть $S^2 \subset S^{n-1}$ и $S^2 \ni x, y, z$: $\mathrm{Proj}_{T_x S^2}(v_j(x)) \neq 0$ для некот $j \leq n-1$.

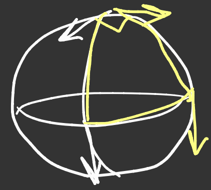
Здесь $\mathrm{Proj}_{T_x S^2}: T_x S^{n-1} \to T_x S^2$, где $P_{xy} \mathrm{Proj}_{T_x S^2} = \mathrm{Proj}_{T_y S^2} \circ P_{xy}$

Тогда $\mathrm{Proj}_{T_x S^2}(v_j(x)) = \mathrm{Proj}_{T_x S^2}\left(P_{zx} \circ P_{yz} \circ P_{xy}(v_j(x))\right) =$

$$= P_{zx} \circ P_{yz} \circ P_{xy} \circ \left(\mathrm{Proj}_{T_x S^2}(v_j(x))\right)$$

Причем (x, y, z) – Δк на S^2. ~~В силу Гаусса-Бонне~~ невозм.

Пусть $\varphi = P_{zx} P_{yz} P_{xy}$. $\boxed{\text{Тогда } \angle(\varphi(v), v) = S_{\Delta(x,y,z)}}$
УРА



$3\pi/2 - \pi = \pi/2$)

Вопросы

① Почему $v_1(F(x)), \dots, v_{n-1}(F(x))$ корр. опред.?

② Что делать в случае, когда $\|v_i(x)\| = \|v_j(x)\|$?
Какая связь с измеримостью?

③ Док-во теор Хопфа-Аносова:
связь h^+, h^-, W^+, W^- с орисферами.

Другие идеи

quasiconf
дифф н.в.

псевдоизом

$\partial_\infty F$

Регул. идеальный симплекс $\longrightarrow$ регул. ид. симплекс

Норма Громова

...

$$\|M\| = \frac{Vol(M)}{Vol(\text{симплекса})}$$
