The Mostow Rigidity Theorem

Nikolay Bogachev (Skoltech & MIPT)

Лекция 4

I) Напоминание + план док-ва (часть 1)

Компактные гиперб. многообразие $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = PO_{n,1}$ torsion-free uniform (cocompact) lattice

и $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, если $\Gamma < PO_{n,1}$ lattice torsion-free $\xrightarrow{\text{Haar measure}} \mu\left(PO_{n,1}/\Gamma\right) < +\infty$

Здесь $\Gamma = \pi_1(M)$.

Теорема жесткости Мостова (верна и для $\mathrm{vol}(M_1) < +\infty$, $\mathrm{vol}(M_2) < +\infty$)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ — компактные гиперб. мн-я.

Пусть $n \geq 3$. Тогда

$$\underbrace{M_1 \underset{\text{homeo}}{\approx} M_2}_{(A)} \iff \underbrace{\Gamma_1 \cong \Gamma_2}_{(B)\ \text{абстр. группы}} \iff \underbrace{\exists g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) : g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2}_{(C)} \iff \underbrace{M_1 \text{ и } M_2 \text{ изометричны}}_{(D)}$$

(E) $M_1 \simeq M_2$ — гомот. экв.

$D \Rightarrow A \Rightarrow E \Rightarrow B$.

1) $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ — комп. гип. мн-я. Пусть $\Gamma_1 \overset{\varphi}{\cong} \Gamma_2$. Тогда $\exists$ (гладкая) гомотопия

$f : M_1 \to M_2$, которая поднимается до Γ_1-эквивариантной псевдоизометрии $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$.

т.е. $B \Rightarrow E$(!)

φ-эквив

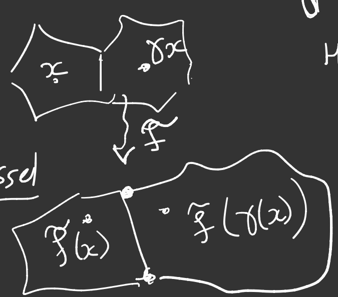
Γ_1-экв.: $\tilde{f}(\gamma x) = \varphi(\gamma) \cdot \tilde{f}(x)$.

(т.е. $\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$)

$\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ — изоморфизм.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}^n \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \varphi(\gamma) \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{H}^n \end{array}$$

Γ_1-tesselation



Γ_2-tessel

Вспоминаем диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{H}^n \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p_2"] \\ M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2 \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

2) $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \xrightarrow[\text{isom}]{\text{pseudo}} \mathbb{H}^n \rightsquigarrow \tilde{f} : \overline{\mathbb{H}^n} \xrightarrow{\text{непр.}} \overline{\mathbb{H}^n}$, т.что

(boundary map) $\partial \tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial \mathbb{H}^n \approx S^{n-1}} : \partial \mathbb{H}^n \xrightarrow[\text{homeo}]{\approx} \partial \mathbb{H}^n$

3) $\partial \tilde{f} : \partial \mathbb{H}^n \to \partial \mathbb{H}^n$ квази конф и $\partial \tilde{f} \in C^1(\partial \mathbb{H}^n)$ п.в.

II Доказательство пунктов ①, ②, ③ из части 1.

① Гладкая гомотопия $f: M_1 \to M_2$ поднимается до Π_1-экв. (есть!) псевдо-изом $\tilde{f}: H^n \to H^n$

Опр. Псевдо-изометрия: $f: X \to Y$, если $\exists\, c>0,\ \varepsilon>0$, т.ч.

$$\frac{1}{c}\rho_X(a,b) - \varepsilon \le \rho_Y(f(a), f(b)) \le c\,\rho_X(a,b).$$

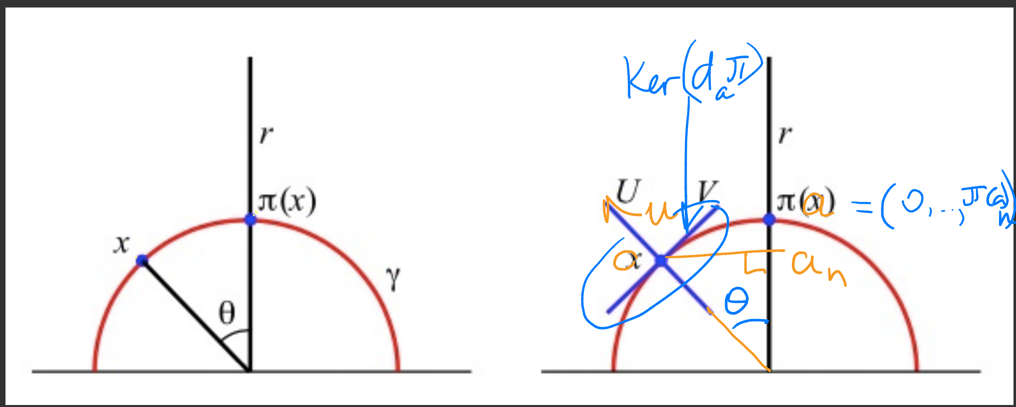
② Продолжение псевдо-изометрии $\tilde{f}: H^n \to H^n$ до homeo $\tilde{f}: \overline{H^n} \to \overline{H^n}$,
т.что $\partial \tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial H^n} : \partial H^n \xrightarrow{\approx} \partial H^n \in C^1(\partial H^n)$

(Following Martelli "Intro to Geom Topol")

Теор. Псевдо-изом $F: H^n \to H^n$ продолжается до $F: \overline{H}^n \xrightarrow{\approx} \overline{H}^n$

Лемма 1

Пусть $\pi: H^n \to r$ — проекция на прямую.
Тогда



(1) $\cosh \rho(x, \pi(x)) = \dfrac{1}{\cos\theta}$

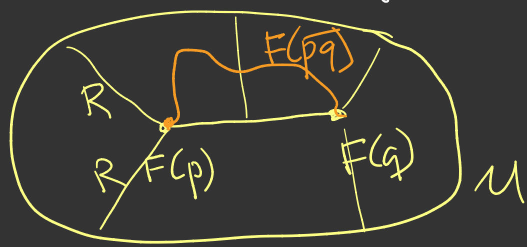
(2) $\max\limits_{\substack{\|v\|=1 \\ v\in T_\alpha H^n}} \|d_\alpha \pi(v)\| = \max\limits_{v \in T_\alpha H^n} \dfrac{\|d_\alpha \pi(v)\|}{\|v\|} = \dfrac{1}{\cosh \rho(\alpha, r)}$

(maximal dilatation of $f: M \to N$ at $a \in M$: $\max\limits_{v \in T_a M} \dfrac{\|d_a f(v)\|}{\|v\|}$)

Лемма 2 Пусть $F: H^n \to H^n$ — псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$:

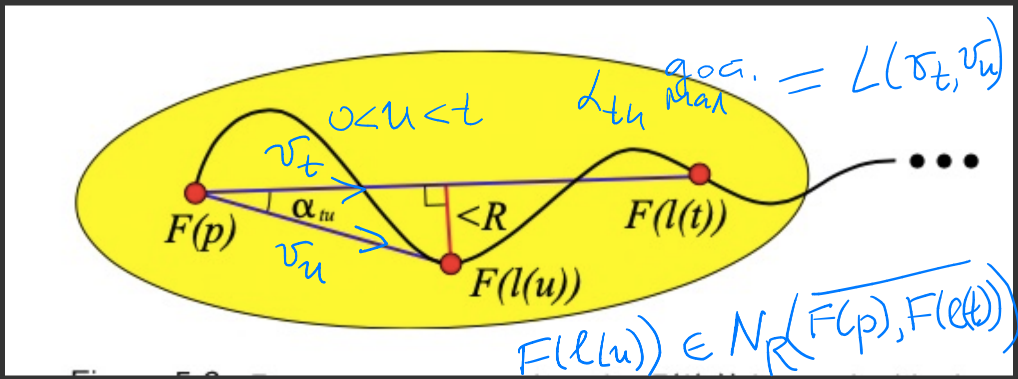
$$F(\overline{pq}) \subset N_R(\overline{F(p)\,F(q)})$$

для всех $p, q \in H^n$.



Лемма 3

$F: H^n \to H^n$ – псевдо-изом.
Тогда $\exists R>0: \forall p\in H^n$
и всякого луча ℓ из p
$\exists!$ луч ℓ' из $F(p)$, т.ч.



$F(\ell) \subset N_R(\ell')$.

Значит мы можем расширить $F: H^n \to H^n$ до

$F: \overline{H^n} \to \overline{H^n}$

Классы эквивалентности лучей = точки на ∂H^n

$F(s) = \lim F(x)$
$x\in\ell, x\to s$.
$\ell\cap\partial H^n = s\cup s'$

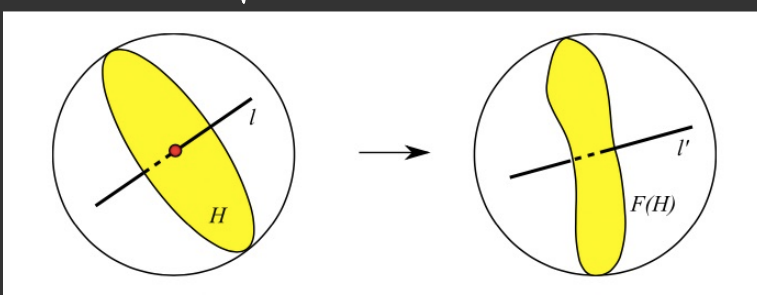
Лемма 4 $\partial F: \partial H^n \to \partial H^n$ корр. опр. и инъек.

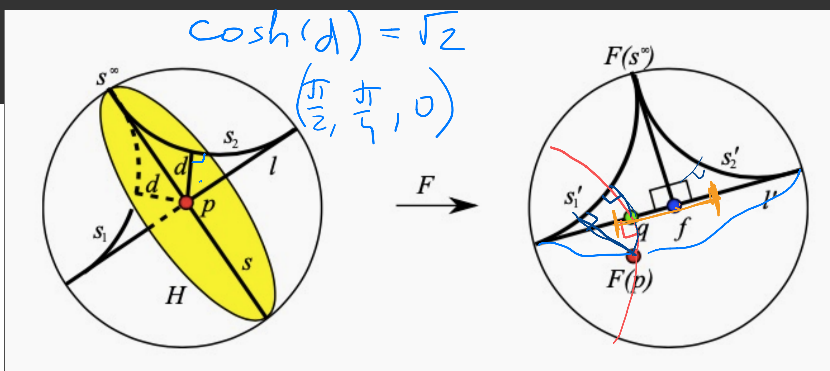
Лемма 5 Пусть $F: H^n \to H^n$ псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$
$\forall \ell \ \exists! \ell'$: $F(\ell) \subset N_R(\ell')$.

Лемма 6 Пусть F – псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$:
$\forall \ell$ и гиперпл-ти $H \perp \ell$ образ $F(H)$ при проекции
на $\ell' \sim F(\ell)$ (аппрокс) попадает на дугу длины $< R$.

↓ геодезическая

ℓ' – геодезическое выпрямление $F(\ell)$





Лемма 7 $F:\overline{H}^n \to \overline{H}^n$ непр. и далее гомео.

Док-во: Пусть $x\in\partial H^n$ и $F(x)\in\partial H^n$. Пусть $l\subset H^n$ — луч, т.ч. $\partial_\infty l = x$. Тогда $\partial_\infty l' = F(x)$. Более того, $F(l)$ — R-close to l'!

$\boxed{F(H(t))\subset S}$

$\Rightarrow F(H^+(t))\subset S \Rightarrow$ непр. в $x\in\partial H^n$.

Далее,

F непр, инъект., сюр на компакте $\overline{H}^n$

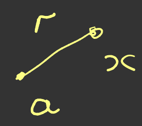
$\uparrow$ подпись

$\Downarrow$

$\boxed{\begin{array}{c}F \text{ гомеоморфизм.}\\ \text{причем } \partial F|_{\partial H^n} \text{ тоже гомеом.}\end{array}}$

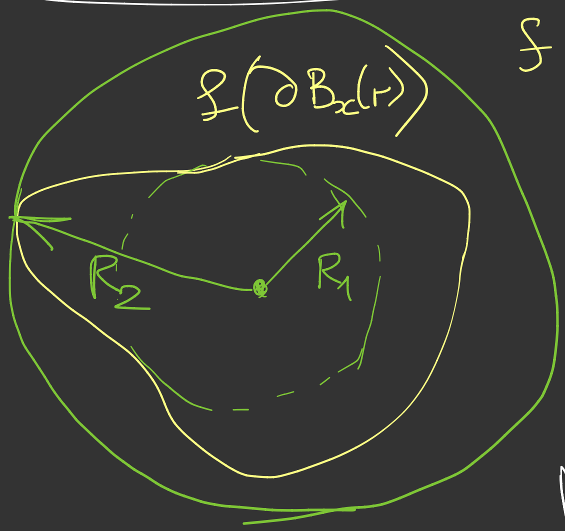
$\blacksquare$

③ Boundary map $\partial\tilde{f}$ is quasi-conformal:



Опр 3 $f : X \to Y$ явл. C-квази-конф., если

$$\forall x \in X \quad \lim_{r\to 0} \frac{\sup\limits_{a\in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)}{\inf\limits_{a\in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)} < C$$



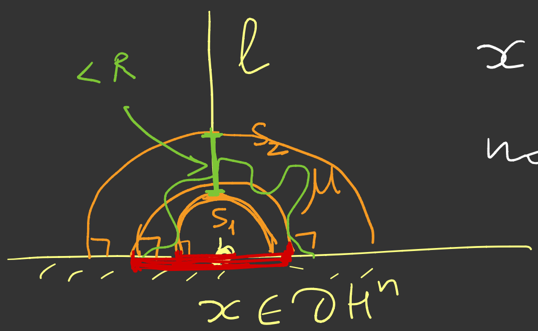
f - quasi-conf, если $\exists C > 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{R_2}{R_1} < C.$$

Док-во ③:

Можем считать, что $\partial_\infty f$ фиксирует (up to isometry) $x \in \partial H^n$ и $\ell \ni x$, $\ell \in H^n$. Тогда по лемме 6 $\exists R > 0$:

$$\boxed{\operatorname{diam} \operatorname{Proj}_\ell(\partial f(\mu)) < R}$$



Рассм сферы S_1 и S_2 рад. R_1 и R_2 соотв., огран.

Тогда $R \geq \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x} = \log\left(R_2/R_1\right)$; т.к. $\partial_\infty f$ — e^R quasi-conf $\Rightarrow$ $\boxtimes$

III Часть 2: пункты ④ - ⑧

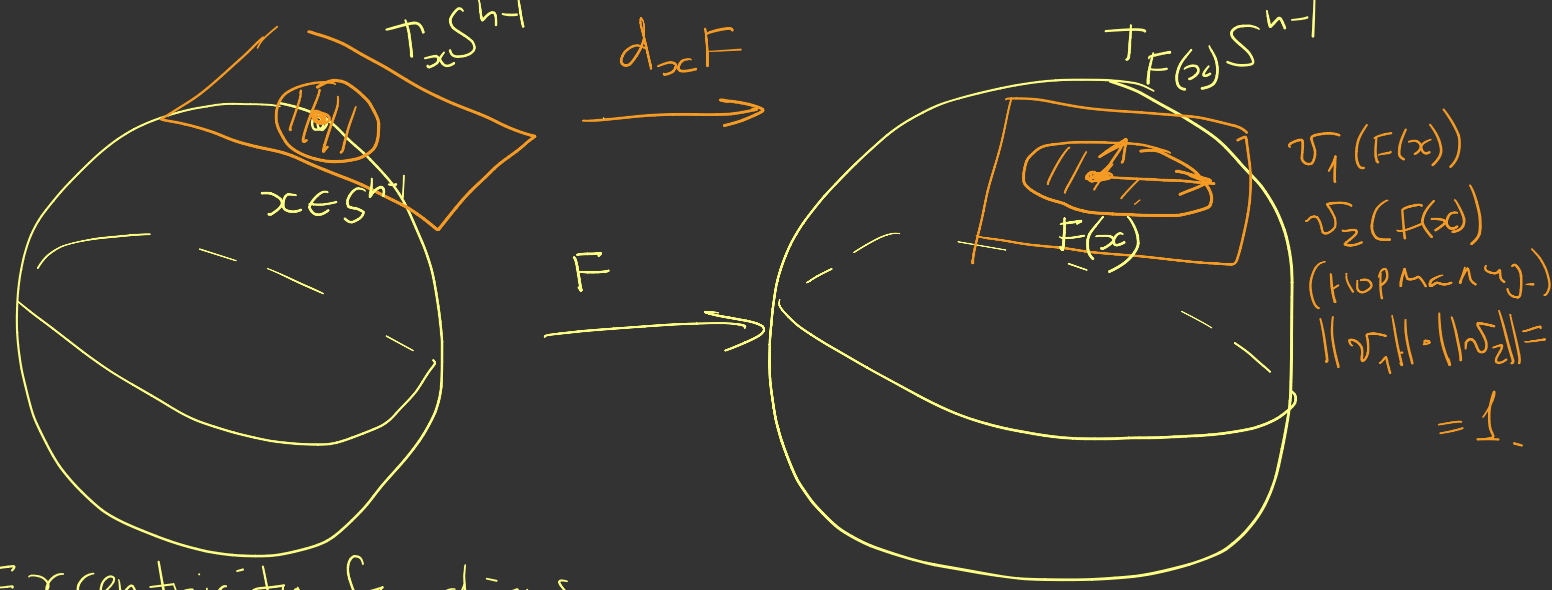
④ $\partial\tilde{f}$ дифференцируемо почти всюду.

Теор. Пусть $n \geq 3$. Тогда quasi-conf homeo $F : S^{n-1} \to S^{n-1}$ явл. дифф. п.в. Более того, d_xF равн. огр., т.е. $\exists \lambda > 1$: $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$ и $\forall v \in T_xS^{n-1}$

$$1/\lambda \leq \frac{\| d_xF(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda$$

Замечание При $n=2$ не выполнено усл-е про d_xF.

А именно, $\exists$ гомеоморфизмы S^1 : $d_xF\equiv 0$.



Excentricity functions

$$e_F(x)=\max_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,\dots,n-1}}\left\{\frac{\|v_i(F(x))\|}{\|v_j(F(x))\|}\right\}\quad \forall \text{ п.в. } x\in S^{n-1}.$$

Заметим, что $e_F(\gamma x)=e_F(x)$ $\forall \gamma\in\Gamma_1=\pi_1(M_1)$, т.к. $\Gamma_1\curvearrowright S^{n-1}$ конф. преобр., причем $F\circ\gamma=\underline{\varphi(\gamma)\circ F}$ (Γ_1- или φ-эквив.) $\varphi:\Gamma_1\xrightarrow{\sim}\Gamma_2$.

$\Rightarrow e_F(\gamma x)=e_{F\circ\gamma}(x)=e_F(x)$.

(5) Dynamics and ergodic theory (!!)

Ссылка: Богачев В.И. "Основы теории меры, Vol 2"

Опр. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ — a measure space.
$\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Тогда измер. отобр. $T:X\to X$ наз. сохр. меру, если $\mu\circ T^{-1}=\mu$ (т.е. $\mu(T^{-1}(E))=\mu(E)$).

Такое отобр. назыв. эргодическим, если T-инв подмн-ва либо меры 0, либо полной меры. То есть:

$$T(E)=E\Rightarrow \mu(E)=0 \text{ или } \mu(X\setminus E)=0\quad \forall E\subset X.$$

Предл. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пр-во с кон. мерой (вероятн).
Тогда $T: X \to X$ эргодично $\iff$ $\forall$ T-инв $f \in L^1(X)$ верно $f \equiv \mathrm{const}$.

Теорема (Birkhoff - Khinchin Ergodic Theorem)

(1) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - вероятн пр-во и $T: X \to X$ — сохр-меру отобр.

Пусть f — μ-изм. функция. Тогда для μ-п.в. $x \in X$

$\exists$ предел $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \bar{f}(x).$$

Более того, $\bar{f} \in L^1(\mu)$ и $\int_X f\, d\mu = \int_X \bar{f}\, d\mu$.

(2) Если к тому же T — эргодическое, то

$$\bar{f} \equiv c \quad \text{и} \quad \int_X \bar{f}\, d\mu = c = \int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

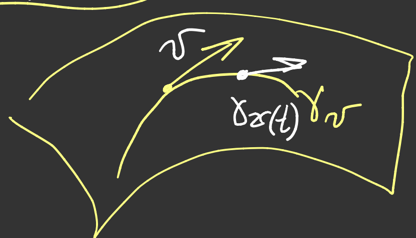
Опр. Геодезические и орициклические потоки

1) Пусть M — хорошее (полное) риманово мн-е и пусть T^1M. Тогда $\forall v \in T^1M$

γ_v — кривая со скор v. $\boxed{\text{Геодез. поток на } T^1M}$ — 1-парамр. семейство

$$g_t: T^1M \longrightarrow T^1M$$

$$v \longmapsto \gamma_v(t);\ d\gamma_v(t)(v)$$



2) Мера Лиувилля на T^1M, где $Vol(M) < +\infty$, единичной массы

это $d\omega = dVol_M \cdot d\theta$, где $d\theta$ – мера Лебега на T^1_pM

$d\omega = dvol_M \wedge d\theta$ и $Vol(M) = 1$.

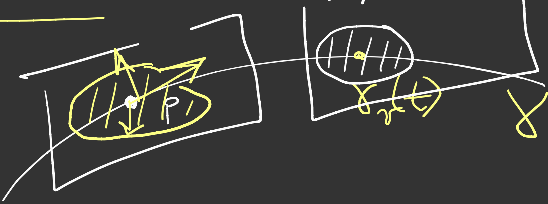
Do Carmo "Riemannian Geo" пробл. 14, гл 3

• $d\omega$ – вероятн. мера на T^1M.

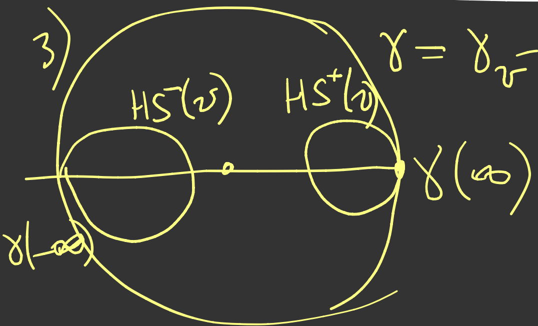
Теор. Лиувилля.

• геод. потоки сохр. меру $d\omega$. Действ., рассмотрим

$V = T^1U$, где $U \underset{\text{отк}}{\subset} M$



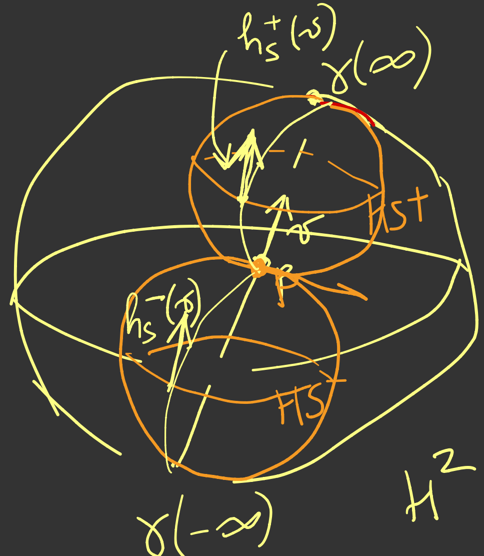
$$\boxed{\omega(V) \overset{?}{=} Vol_M(U) \cdot \theta(V)}$$

3) 

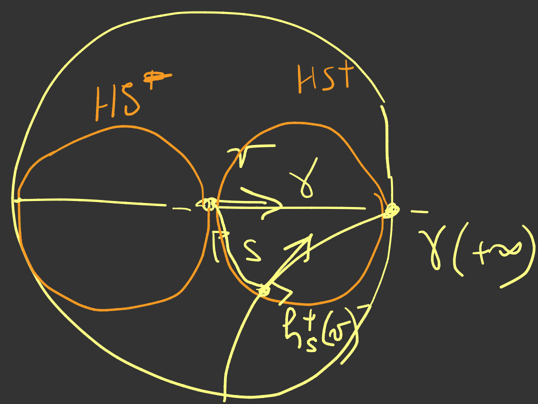
$\gamma = \gamma_v$ – геодезическая с вект. $v \in T^1M$

положит. орицикл. поток $h_s^+ : v$ сдвиг вдоль $HS^+(v)$ на расст. S от т. p

отриц. - - - -



$T_pH^3 = \mathbb{R}^3_p$.



Теор. Пусть M – полное связное гиперб. мн-ие конечн. объема.

Тогда геод. поток на T^1M явл. эргодическим по мере Лиувилля.