The Mostow Rigidity Theorem

Nikolay Bogachev (Skoltech & MIPT)

Лекция 3

(I) Напоминание + план док-ва (часть 1)

Компактные гиперб. многообразие $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = PO_{n,1}$ torsion-free uniform (cocompact) lattice

и $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, если $\Gamma < PO_{n,1}$ lattice torsion-free $\xrightarrow{\text{Haar measure}} \mu(PO_{n,1}/\Gamma) < +\infty$

Здесь $\Gamma = \pi_1(M)$.

Теорема жесткости Мостова

(верна и для $\mathrm{vol}(M_1) < +\infty$, $\mathrm{vol}(M_2) < +\infty$)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ – компактные гиперб. мн-я.

Пусть $n \geq 3$. Тогда

$$\underset{\substack{\text{homeo}\\(A)}}{M_1 \approx M_2} \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{абстр. группы}\\(B)}}{\Gamma_1 \cong \Gamma_2} \Leftrightarrow \underset{(C)}{\exists g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) : g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2} \Leftrightarrow \underset{(D)}{M_1 \text{ и } M_2 \text{ изометричны}}$$

(E) $M_1 \overset{h}{\simeq} M_2$ – гомот. экв.

$D \Rightarrow A \Rightarrow E \Rightarrow B$.

(1) $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ – комп. гип. мн-я. Пусть $\Gamma_1 \overset{\varphi}{\cong} \Gamma_2$. Тогда $\exists$ (гладкая) гомотопия

$f : M_1 \to M_2$, которая поднимается до Γ_1-эквивариантной квази-изометрии $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$.

т.е. $B \Rightarrow E$ (!)

!! Мы зависли здесь !!

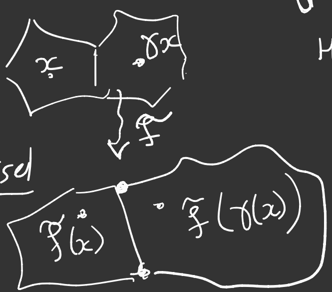
Γ_1-экви.: $\tilde{f}(\gamma x) = \varphi(\gamma) \cdot \tilde{f}(x)$.

(т.е. $\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$)

$\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ – изоморфизм.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{H}^n \arrow[d, "\varphi(\gamma)"] \\ \mathbb{H}^n \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathbb{H}^n \end{tikzcd}$$

Γ_1-tesselation



Γ_2-tessel

Вспоминаем диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{H}^n \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p_2"] \\ M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2 \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

(2) $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \xrightarrow[\text{isom}]{\text{pseudo}} \mathbb{H}^n \rightsquigarrow \bar{\tilde{f}} : \overline{\mathbb{H}^n} \xrightarrow{\text{Непр.}} \overline{\mathbb{H}^n}$, т.что

(boundary map) $\partial\tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial\mathbb{H}^n \approx S^{n-1}} : \partial\mathbb{H}^n \xrightarrow[\text{homeo}]{\approx} \partial\mathbb{H}^n$

(3) $\partial\tilde{f} : \partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n$ квази конф и $\partial\tilde{f} \in C^1(\partial\mathbb{H}^n)$ п.в.

II Доказательство пунктов ①,②,③ из части 1.

① Гладкая гомотопия $f: M_1 \to M_2$ поднимается до псевдо-изом $\tilde f: H^n \to H^n$

(Γ_1-экв. есть!)

Опр Квази-изометрия метрич. пр-в: $C>0$, $\varepsilon \geq 0$

$f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ есть (C, ε) квази-изом, если

- $\frac{1}{C} \rho_X(x,x') - \varepsilon \leq \rho_Y(f(x), f(x')) \leq C \cdot \rho_X(x, x') + \varepsilon$
- f is a coarse onto, i.e. $\exists C' > 0 : \forall y \in Y \; \exists x : \; y \in B(f(x), C')$

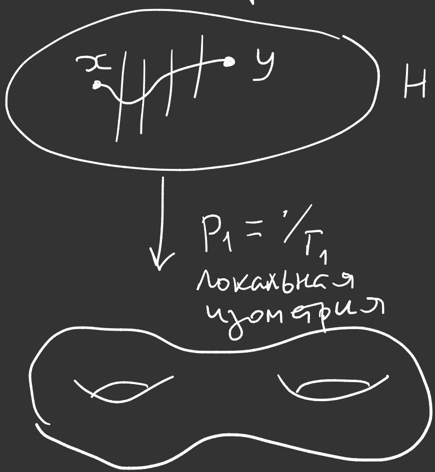
Опр. Псевдо-изометрия: $f: X \to Y$, если $\exists\, c>0$, $\varepsilon>0$, т.ч.

$$\frac{1}{c} \rho_X(a,b) - \varepsilon \leq \rho_Y(f(a), f(b)) \leq c\, \rho_X(a,b).$$

---

1) отобр. $x \longmapsto \dfrac{\rho(\tilde f(x), \tilde f(y))}{\rho(x,y)}$ — непрер., причем в силу компактности M_1 оно $\left[C_x := \max\limits_{y \in \overline{B(x,1)}} \dfrac{\rho(\tilde f(x), \tilde f(y))}{\rho(x,y)} \right]$ будет C-Lipschitz для некот. $C>0$.

$C = \sup\limits_x C_x$



$\Rightarrow \tilde f$ – C-Lipschitz

Аналогично, g и $\tilde g$ оба будут C-Lipschitz.

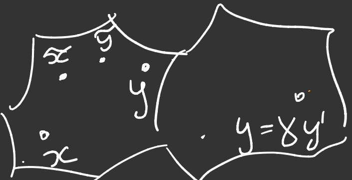
Поэтому имеем:

$$\rho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \boxed{\leq} C \rho(x,y); \quad \rho(\tilde g(x), \tilde g(y)) \boxed{\leq} C \rho(x,y) \quad \forall x,y \in H^n$$

2) Итак, $\tilde g \circ \tilde f \simeq \mathrm{Id}_{H^n}$ (т.к. $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{M_1 = H^n/\Gamma_1}$), причем $\tilde g \circ \tilde f(\gamma x) = \gamma(\tilde g(\tilde f(x)))$

Напомним, что $C = \sup\limits_x C_x$, где $C_x = \max\limits_{y \in \overline{B(x,1)}} \dfrac{\rho(f(y), f(x))}{\rho(y,x)}$. Тогда

$$\rho(x,y) - 2K \leq \rho(\underbrace{\tilde g \circ \tilde f(x)}_{=\tilde x}, \underbrace{\tilde g \circ \tilde f(y)}_{=\tilde y}) \leq C \rho(\tilde f(x), \tilde f(\tilde y)), \text{ где } K = \mathrm{diam}(\mathcal{D})$$



$$\Downarrow$$

$$\rho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \boxed{\geq} \frac{1}{C} \rho(x,y) - \frac{2K}{C}$$

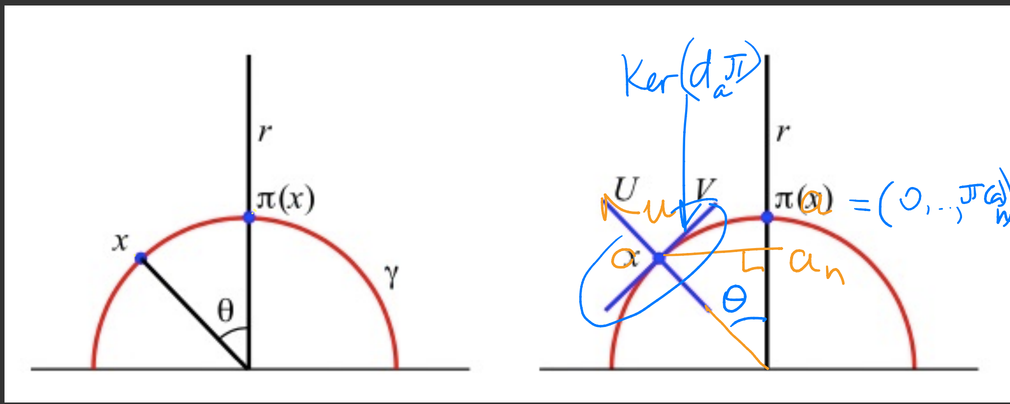
∎

② Продолжение псевдо-изометрии $\tilde{f}: H^n \to H^n$ до homeo $\tilde{f}: \overline{H^n} \to \overline{H^n}$,
т.что $\partial \tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial H^n} : \partial H^n \xrightarrow{\approx} \partial H^n \in C^1(\partial H^n)$

(Following Martelli "Intro to Geom Topol")

Теор. Псевдо-изом $F: H^n \to H^n$ продолжается до $F: \overline{H}^n \xrightarrow{\approx} H^n$

Лемма 1



Пусть $\pi: H^n \to r$ — проекция на прямую.

Тогда

(1) $\cosh \rho(x, \pi(x)) = \dfrac{1}{\cos \theta}$

(2) $\max\limits_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in T_a H^n}} \|d_a \pi(v)\| = \max\limits_{v \in T_a H^n} \dfrac{\|d_a \pi(v)\|}{\|v\|} = \dfrac{1}{\cosh \rho(a, r)}$

(maximal dilatation of $f: M \to N$ at $a \in M$: $\max\limits_{v \in T_a M} \dfrac{\|d_a f(v)\|}{\|v\|}$)

Док-во:

(1) М.сч., что мы в $H^2 \subset \mathbb{C}$, $\pi(x) = i$, $r(t) = ie^t$.

$\gamma(t) = \dfrac{ie^t + 1}{-ie^t + 1}$, т.к. $\varphi(r) = \gamma$, где $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$.

Пусть $s = \rho(x, \pi(x))$. Тогда $x = \dfrac{ie^s + 1}{-ie^s + 1}$ $\left|\begin{matrix} \text{при } s = 0 \\ x = i \end{matrix}\right|$

и $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}\left[\dfrac{(1 + ie^s)^2}{e^{2s} + 1}\right] = \dfrac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \dfrac{1}{\cosh(s)}$

(2) $\pi: H^n \to r$, тогда $d_a\pi: T_a H^n \to T_{\pi(a)} r$

Мы в модели $H^n_+ = \{x_n > 0\}$. Тогда $T_a H^n = U \oplus V = U \oplus \mathrm{Ker}(d_a \pi)$, где $\dim V = n-1$, $U = \langle u \rangle$

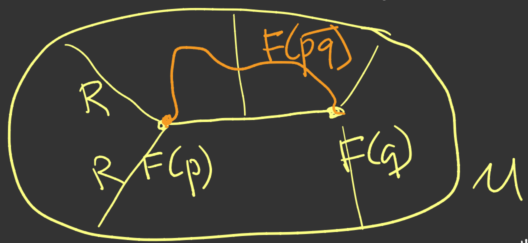
Имеем для $u \in U$

$$\frac{\|d_a \pi(u)\|}{\|u\|} = \frac{a_n}{(\pi(a))_n} = \cos \theta \overset{(1)}{=} \frac{1}{\cosh \rho(a, \pi(a))}$$ ∎

Лемма 2 Пусть $F: H^n \to H^n$ — псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$:

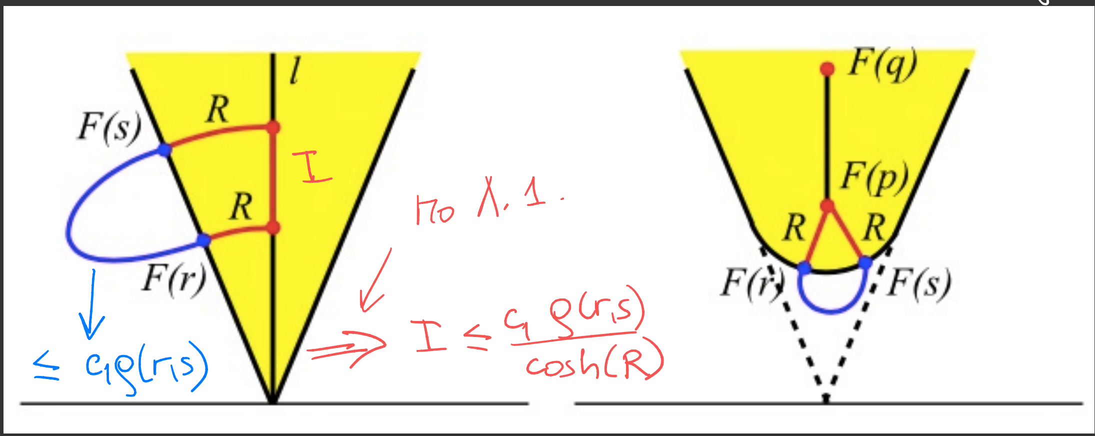
$$F(\overline{pq}) \subset N_R(\overline{F(p)F(q)})$$

для всех $p,q \in H^n$.



Док-во. $\frac{1}{c_1}\rho(x,y) - c_2 \le \rho(F(x),F(y)) \le c_1\rho(x,y)$. В ч., F — c_1-Липш.

Возьмем R: $\cosh(R) > 2c_1^2$. Пусть $\overline{rs} \subset \overline{pq}$ — макс. кусок, на котором $F(\overline{rs})$ вылазит за пределы U.



Тогда

$$\frac{1}{c_1}\rho(r,s) - c_2 \le \rho(F(r),F(s)) \le c_1\rho(r,s).$$

Правую часть можно улучшить (лемма 1)

$$\rho(F(r),F(s)) \le \frac{c_1}{\cosh(R)}\rho(r,s) + 2R.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{\cosh(R)}\right)\rho(r,s) \le 2R + c_2,$$

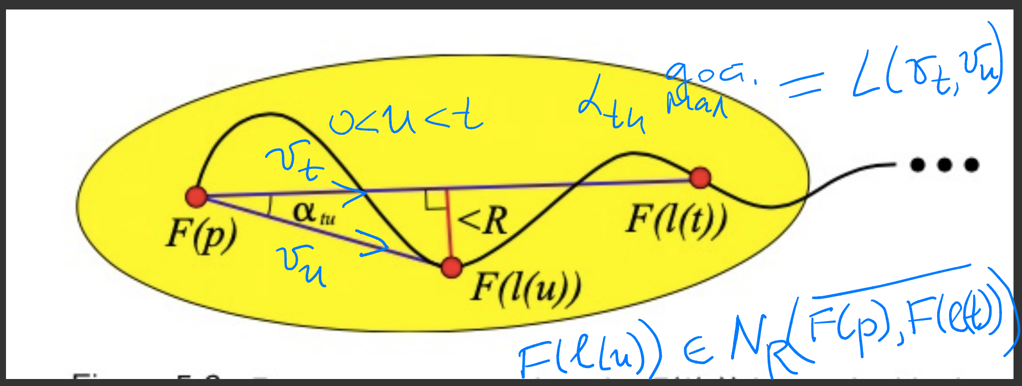
причем $\cosh(R) > 2c_1^2$, т.е.

$\rho(r,s) < M(c_1,c_2)$. Берем $R' := R + c_1 M$.

$\blacksquare$

Лемма 3

$F: H^n \to H^n$ — псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$: $\forall p \in H^n$ и всякого луча ℓ из p $\exists!$ луч ℓ' из $F(p)$, т.ч.



$$F(\ell) \subset N_R(\ell').$$

Док-во: Пусть $\ell(t)$ — натур. парам., где $\ell(0)=p$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(F(p), F(\ell(t))) = +\infty$, т.к. F – псевдо-изом.

см. рис + Л2

Пусть $v_t \in T_{F(p)}H^n$, где $\|v_t\| = 1$. Тогда $\{v_t\} \to v \in T_{F(p)}H^n$

Пусть ℓ' — луч с напр v. Тогда $F(\ell) \subset N_R(\ell')$. $\square$

Значит мы можем расширить $F: H^n \to H^n$ до

$F: \overline{H^n} \to \overline{H^n}$

Классы эквивалентности лучей = точки на ∂H^n

$F(s) = \lim F(x)$
$x \in \ell, x \to s$.
$\ell \cap \partial H^n = s \cup s'$

Лемма 4 $F: \partial H^n \to \partial H^n$ корр. опр. и инъекц.

Док-во Пусть ℓ_1, ℓ_2 — лучи т.ч. $\rho(\ell_1(t), \ell_2(t)) < M \ \forall t$.

Пусть $F(\ell_1) = \ell_1'$, $F(\ell_2) = \ell_2'$

Если $\rho(\ell_1'(s), \ell_2'(s)) \to +\infty$, то $\rho(F(\ell_1(t)), F(\ell_2(t))) \to +\infty$ Невозм. в силу C_1-Lip.

Если ℓ_1 и ℓ_2 расходятся, то и ℓ_1' и ℓ_2' расход.

Лемма 5 Пусть $F: H^n \to H^n$ псевдо-изом. Тогда $\exists R > 0$

$\forall \ell \ \exists! \ell'$: $F(\ell) \subset N_R(\ell')$.

Док-во:

$\ell(t): \mathbb{R}\to H^n$ – нат. пар. Можно разрезать ℓ на 2 луча.

Тогда $\forall t>0$ имеем

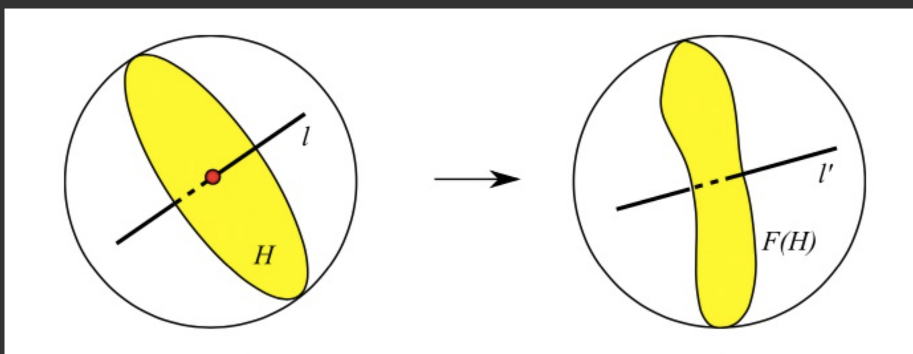
$$F(\ell([-t,t])) \subset N_R\left(\overline{F(\ell(-t))\,F(\ell(t))}\right)$$ и

берем $t\to+\infty \Rightarrow F(\ell)\subset N_R(\ell')$.

Лемма Пусть F – псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$: $\forall \ell$ и гиперпл-ти $H\perp \ell$ образ $F(H)$ при проекции на $\ell' \sim F(\ell)$ (аппрокс) попадает на дугу длины $< R$.

геодезическая

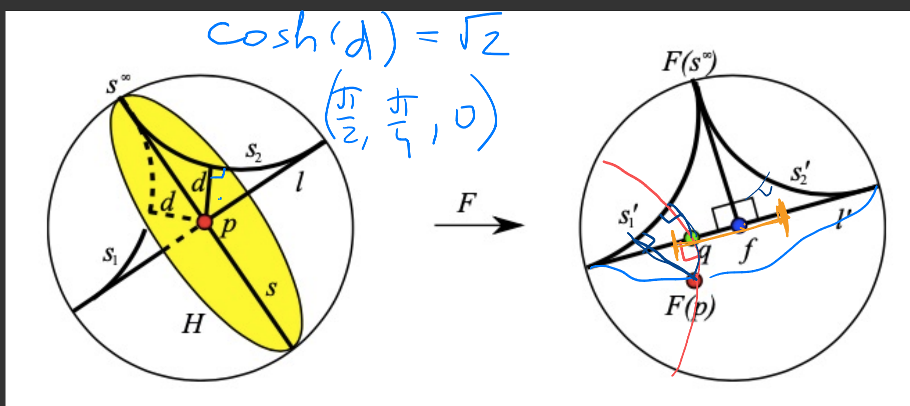
ℓ' – геодезическое выпрямление $F(\ell)$



Док-во:

Рассм произв. прямую $s\subset H$. прох. через $p=\ell\cap H$

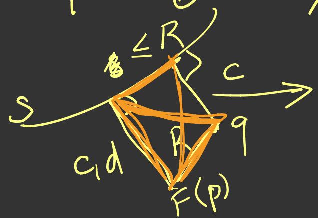
$F(s)\subset N_R(s')$, где $s'\neq \ell'$

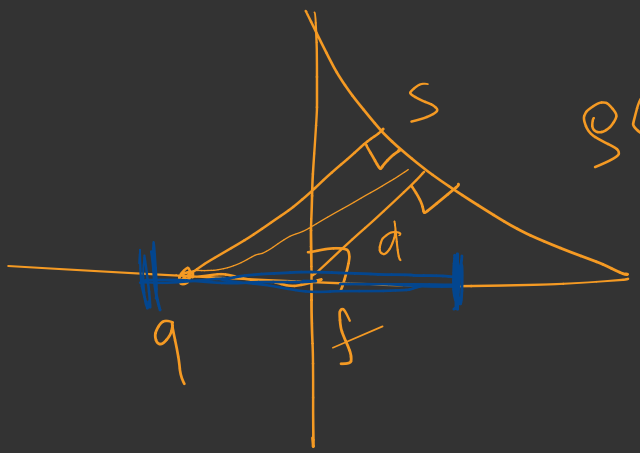


$q=\pi_{\ell'}(F(p)) \Rightarrow \rho(q,F(p))\le R \Rightarrow \boxed{\rho(f,q) < C_1 d + \cancel{2}R}$

$\rho(F(p), s_j')\le C_1\cdot d$

$\rho(q, s_j')\le (C_1 d + \cancel{2}R)$





$$\rho(q,f) < \rho(q,s) + d$$
$$< \mathrm{const}(d,R).$$
$$\le C(R).$$

Лемма $F : \overline{H^n} \to \overline{H^n}$ непр. и далее: гомео.

В нашем случае $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{H^n}$

F, G обе непр.

F непр, инъект., сюр на компакте $\overline{H^n}$

$\uparrow$ поднятие

$M_1 \rightleftarrows M_2$, f — гомео.

$\Downarrow$

F гомеоморфизм.

причем $\partial F|_{\partial H^n}$ тоже гомеом.