The Mostow Rigidity Theorem

Nikolay Bogachev (Skoltech & MIPT)

Лекция 2

① Напоминание:

Компактные гиперб. многообразие $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = PO_{n,1}$
torsion-free
uniform (cocompact) lattice

и $\mathrm{vol}(M) < +\infty$, если $\Gamma < PO_{n,1}$ lattice torsion-free $\xrightarrow{\text{Haar measure}} \mu(PO_{n,1}/\Gamma) < +\infty$

Здесь $\Gamma = \pi_1(M)$.

Теорема жесткости Мостова (верна и для $\mathrm{vol}(M_1) < +\infty$, $\mathrm{vol}(M_2) < +\infty$)

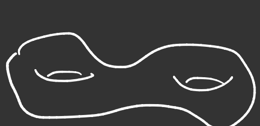
Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ — компактные гиперб. мн-я.

Пусть $n \geq 3$. Тогда

$$\underset{\text{homeo}}{M_1 \simeq M_2} \Leftrightarrow \underset{\text{абстр. группы}}{\Gamma_1 \simeq \Gamma_2} \Leftrightarrow \exists g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) : g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2 \Leftrightarrow M_1 \text{ и } M_2 \text{ изометричны}$$

Неверно при $n = 2$. См. деформации фуксовых групп, пространства модулей $\mathcal{M}(S_g)$, для $\chi(S_g) < 0$, пространства Тайхмюллера $\mathrm{Teich}(S_g) = \mathrm{HypMet}(S_g)/\mathrm{Diff}_0(S_g)$ и mapping class group $MCG(S_g) = \mathrm{Mod}(S_g) = \mathrm{Diff}^+(S_g)/\mathrm{Diff}_0(S_g)$

$\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$.



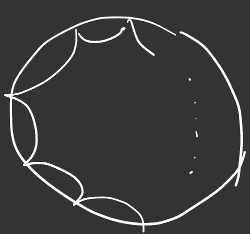
$S_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$

$$\mathcal{M}(S_g) = \mathrm{Teich}(S_g)/\mathrm{Mod}(S_g)$$

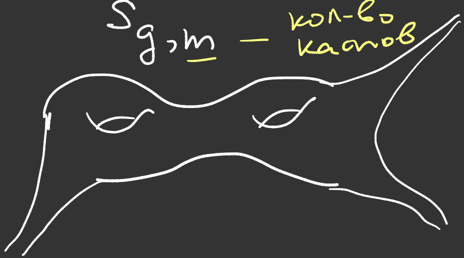
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(S_g) = 6g - 6$$

Для некомп. при $n=2$ тоже неверна (см. лек 1)

$S_{g,m}$ — m — кол-во каспов



$\simeq$



$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(S_{g,m}) = 6g - 6 + 2m$$

② An outline of the proof

Из топологии:

M и N гомеоморфны $\Rightarrow$ M и N гомотоп. эквив. $\Rightarrow$ $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$

$M \cong N$ $\qquad$ $(M \simeq N)$

① Пусть H^n/Γ_1 и H^n/Γ_2 — комп. гиперб. мн-я, причем $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. (т.е. M_1, M_2 are both $K(\pi,1)$, $\pi = \Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.)

Тогда в силу стягиваемости H^n (т.е. $\pi_1(H^n)=0$)

$\exists$ гомотоп. эквивалентность $f : H^n/\Gamma_1 \to H^n/\Gamma_2$.

$$M_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M_2 \qquad g\circ f \simeq Id_{M_1} \qquad f\circ g \simeq Id_{M_2}$$

(Теор. для асферич. мн-ий: пусть $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$, тогда $\exists$ гомот. экв-ть $f: X \to Y$)

② Отобр. $f : H^n/\Gamma_1 \to H^n/\Gamma_2$ поднимается до Γ_1 — эквивар. квази-изометрии $\tilde{f} : H^n \to H^n$.

Опр 1 Эквивариантность: $\quad p : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ - изоморфизм;

$$\tilde{f}(\gamma x) = p(\gamma)\cdot \tilde{f}(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma_1, x \in H^n.$$

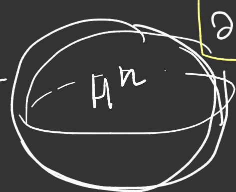
Опр 2 Квази-изометрия метрич. пр-в:

$f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ есть (C, ε) квази-изом, если

- $\frac{1}{C}\rho_X(x,x') - \varepsilon \le \rho_Y(f(x), f(x')) \le C\cdot\rho_X(x,x') + \varepsilon$
- f is a coarse onto, i.e. $\exists C' > 0 : \forall y \in Y \ \exists x : \ y \in B(f(x), C')$

Имеем коммут. диагр.:

$$\begin{tikzcd} H^n \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"] & H^n \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p_2"] \\ \boxed{M_1 = H^n/\Gamma_1} \arrow[r, bend left, "f"] & \boxed{H^n/\Gamma_2 = M_2} \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$



$\boxed{\partial H^n = S^{n-1}}$

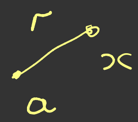
$(g\circ f \simeq Id_{M_1} \ ; \ f\circ g \simeq Id_{M_2})$

③ Квази-изометрия $\tilde{f}: H^n \to H^n$ индуцирует Γ_1-эквив. гомеоморфизм

$$\partial\tilde{f}: \underset{\cong\, S^{n-1}}{\partial H^n} \to \underset{\cong\, S^{n-1}}{\partial H^n}.$$

$\boxed{\text{boundary map}}$ (!!)

④ Boundary map $\partial\tilde{f}$ is quasi-conformal:



Опр 3 $f: X \to Y$ явл. C-квази-конф., если

$$\forall x \in X \quad \lim_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{a \in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)}{\inf\limits_{a \in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)} < C$$

Более того, $\partial\tilde{f}$ дифференцируемо почти всюду.

⑤ Dynamics and ergodic theory (!!)

Эргодичность геод. потоков на комп. гиперб. мн-ях $\Rightarrow$ $\boxed{\Gamma_1 \curvearrowright S^{n-1} = \partial H^n \text{ эргодично.}}$

$\Downarrow$

⑥ $d(\partial\tilde{f}): TS^{n-1} \to TS^{n-1}$ — конформное отобр.

$\Downarrow$

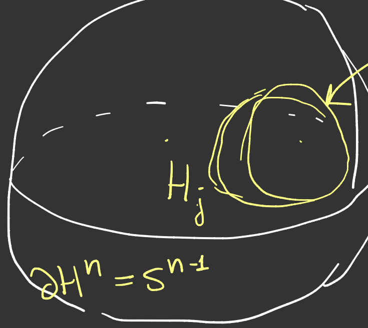
⑦ $\partial\tilde{f}: \partial H^n \to \partial H^n$ — конформно.

⑧ Тогда $\partial\tilde{f}$ индуцирует Γ_1-экв. изометрию $\tilde{F}: H^n \to H^n$, которая спускается до изометрии $F: H^n/\Gamma_1 \to H^n/\Gamma_1$.

$\nearrow$

(**Теор** $\operatorname{Isom}(H^n) \simeq \operatorname{Conf}(S^{n-1})$
(Reflections) (inversions).

$\gamma = R_1 \cdot \ldots \cdot R_{n+1} \rightsquigarrow \gamma' =$ инверсии отн. S_j.)



$S_j = \partial_\infty H_j \cong S^{n-2}$

③ Boundary map

$\tilde{f}$

$p: \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$

? $\boxed{\tilde{f}(\gamma x) = p(\gamma)\,\tilde{f}(x)}$

Итак, вспоминаем диаграмму:

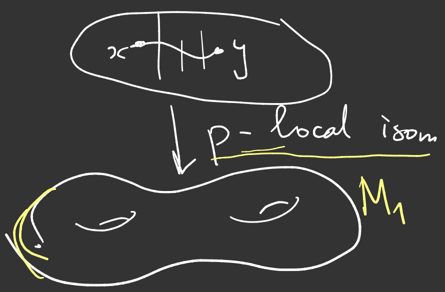
$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{H}^n \arrow[l, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p_2"] \\ M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2 \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Здесь $f \circ g \simeq Id_{M_2}$; $g \circ f \simeq Id_{M_1}$.

$\boxed{\text{Теор. } \tilde{f} \text{ можно построить } \Gamma_1\text{-эквив. Более того, } f, g \in C^1 \text{ (или даже } C^\infty)}$

(сильная аппрокс. Уитни)

1) отобр. $x \longmapsto \dfrac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x,y)}$ — непрер., причем в силу компактности M_1 оно будет C-Lipschitz для некот. $C > 0$.

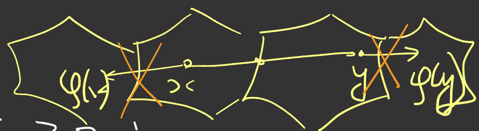


$\Rightarrow \tilde{f}$ - C-Lipschitz

Аналогично, g будет C-Lipschitz.

2) Докажем, что $\tilde{f}, \tilde{g}$ — quasi-isometries.

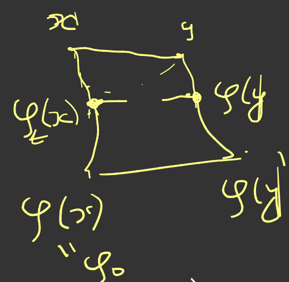
$$? \leq \frac{\rho(f(x), f(x'))}{\rho(x,x')} \leq C \text{ - есть!}$$



Заметим, что $\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq Id_{\mathbb{H}^n}$. Тогда $\exists C_1 > 0$:

$$\boxed{\rho(x,y) - 2C_1 < \rho(\underbrace{\tilde{g}\circ\tilde{f}(x)}_{\varphi}, \underbrace{\tilde{g}\circ\tilde{f}(y)}_{\varphi})} \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^n$$

Вопрос: верно ли, что $C_1 = \text{diam}(M_1)$?



Отсюда имеем ($\tilde{g}$ is C-Lip)

$$\rho(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \geq \frac{1}{C}\rho(\tilde{g}\circ\tilde{f}(x), \tilde{g}\circ\tilde{f}(y)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{C}\left(\rho(x,y) - 2C_1\right) \quad \left(\text{т.е. } \varepsilon = \frac{2C_1}{C}\right).$$

В силу комп-ти M_1 и M_2 ясно, что f is coarse onto

Γ_1-equiv $\Rightarrow \tilde{f}$ is coarse.