Гиперболическая геометрия и пространства Лобачевского

Лекция 2: основы римановой геометрии и векторная модель пространства Лобачевского

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Основы дифференциальной топологии: гладкие отображения, касательные пространства, вложения и погружения, теоремы Уитни.

2. Основы римановой геометрии: риманова метрика, риманово многообразие, геодезические.

3. Векторная модель пространства Лобачевского

1. Касательное пространство. Гладкие отображения. Погружения и вложения.

Опр. $f: M \to N$ – гладкое отобр. гладких мн-ий ($f \in C^\infty(M,N)$), если оно гладкое в картах:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & N \arrow[d, "\psi_V"] \\
\varphi(U) \arrow[r, "\tilde f"] & \psi(V)
\end{tikzcd}$$

$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое $\tilde f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Опр. Гладкая кривая в M – это гладкое отобр. $\gamma: \mathbb{R}^1 \to M$.

Опр. (Касат. пр-во к M в точке x) $:= T_xM$ – семейство классов эквивалентности векторов скоростей кривых $\gamma \ni x$.

Заметим, что $\dim T_xM = n$ для всех $x \in M$. Если $f: M \to N$ – гл. отобр., то $d_x f: T_xM \to T_{f(x)}N$ – лин. отобр. касат. пр-в.

Опр. $f: M \to N$ – погружение (иммерсия), если f – гладкое и $d_x f$ – инъекция $\forall x \in M$.

$f: M \to N$ – вложение, если f – погружение и $M \approx f(M)$.

Предл.:
1) f – гладкая инъекция + погружение, M – компакт $\Rightarrow$ f – вложение
2) f – собств. ($f^{-1}(K)$ – компакт), f – инъекция + погр $\Rightarrow$ f – вложение.

Теор (Уитни - слабая)

Всякое n-мерное мн-е M можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теор (сильная Теор Уитни о влож).

Всякое n-мн-е M можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$.

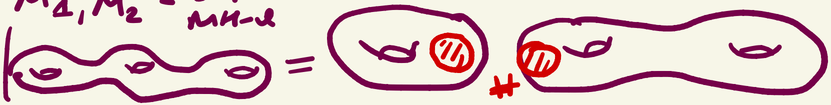
Теор. (об аппроксимации Уитни)

Пусть $F: M \to N$ - непр отобр. гл. мн-ий. Тогда

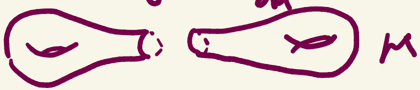
$\underset{\text{гомотопно}}{F \simeq \tilde{F}}$ - гл. отобр: $M \to N$.

Теор 1) Пусть M, N - n-мн-я, $\partial M \underset{f}{\overset{\text{diffeo } f}{\cong}} \partial N$. Тогда мн-е $M \cup_f N$ - гладкое мн-е без края

2) $M_1 \# M_2$ - гл. мн-е, если M_1, M_2 - гл. мн-я



3) Пусть $\partial M \neq \emptyset$. Тогда $M \underset{\partial M}{\cup} M$ - мн-я без края



2. Основы римановой геометрии

Опр. Пусть M — гл. мн-е. Риманова метрика на M — это симм. полож.-опред. билин форма $g_p(x,y)$, гладко зависящая от $p \in M$ ($g_p(x,x) > 0 \ \forall x \in T_pM,\ x \neq 0$).

Риманово многообр-е — пара (M,g), где g — рим. метрика

Примеры 1) $\mathbb{R}^n$; $g(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$

2) Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — локально есть гладкая регул. пов-ть, т.е. $S = f(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^2$, $\operatorname{rank} df = 2$

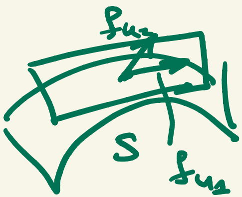
$$\operatorname{Mat} df = \begin{array}{c} f_{u_1} \to \\ f_{u_2} \to \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}^T .$$

Напр. $S = S^2 = f(U)$, где

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cdot \cos u_2 \\ \cos u_1 \cdot \sin u_2 \\ \sin u_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Mat} df = \left(\underset{\|}{\frac{\partial f}{\partial u_1}} \;\middle|\; \underset{\|}{\frac{\partial f}{\partial u_2}} \right)$$

$$T_pS = \langle f_{u_1}; f_{u_2} \rangle .$$



$$g_p(a,b) := \overline{a_1, a_2} \begin{pmatrix} G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

где $G = \operatorname{Gr}(f_{u_1}, f_{u_2})$.

Теор Всякое гладкое мн-е снабжается римановой метрикой.

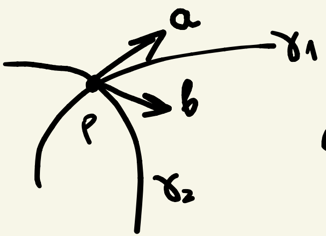
Замечание: Риманова метрика позв. вычислять:

- длины кривых
- площади и объемы
- углы

Опр Пусть $\gamma(t)$ — кривая в M. Скорость γ — $\gamma'(t)$.
Тогда длина кривой γ на отр. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ есть:

$$L(\gamma)\big|_{[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \cdot dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$$

Риман. метрика g позв. вычислять углы между кривыми:



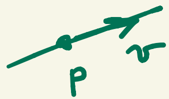
$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(a, b)$$

$$\cos \angle(a,b) = \frac{g_p(a,b)}{\sqrt{g_p(a,a) \cdot g_p(b,b)}}$$

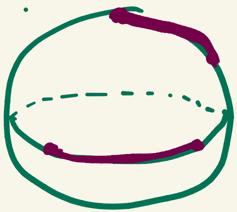
Опр Пусть (M,g) – св. рим. мн-е. Тогда определим расст. м/у точками $\rho(p,q) = \inf\limits_{\gamma} L(\gamma)\big|_{[0,1]}$, где $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.

Опр. Геодезическая на M – это кривая γ на M с пост. скоростью, локально реализующая расстояние. Т.е. $\forall t \in \mathbb{R} \ \exists [t_1, t_2] \ni t : \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L(\gamma)\big|_{[t_1,t_2]} = c(t_1 - t_2)$, где $\|\gamma'(t)\| \equiv c$.

Примеры 1) $\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = p + t \cdot v$, здесь $v = \gamma'(t)$.



2) На сфере S^2:



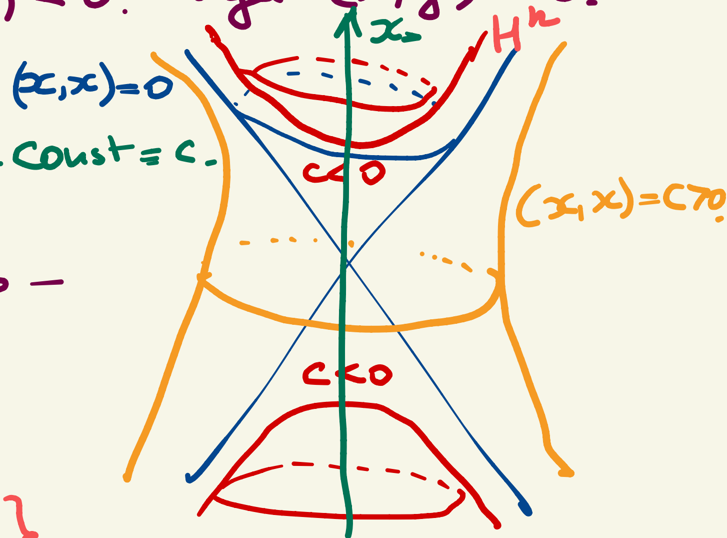
– дуги больших окр-тей — сечений S^2 плоскостями через O.

3. Векторная модель пр-ва Лобачевского H^n.

Рассм. $\mathbb{R}^{n,1}$ – пр-во Минковского – $\mathbb{R}^{n+1}$, снабж. скал. произведением: $(x,y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

т.е. $(x,y) = x^T I_{n,1} y$, где $I_{n,1} = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, +1)$.

Предл. Пусть $(x,x)<0$, $(y,y)<0$. Тогда $(x,y) \le 0$.



Рассмотрим квадрику $(x,x) = \mathrm{const} = c$.

Опр. Точки пр-ва Лобачевского – это точки св. компоненты гиперболоида $(x,x) = -1$:

$$H^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \;\middle|\; \begin{matrix} (x,x) = -1 \\ x_0 > 0 \end{matrix} \right\}$$

Теор. 1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — гладкое на $\mathbb{R}^{n,1}$

2) $dq_x(y) = 2\langle x,y\rangle$, где $q(x) = \langle x,x\rangle$.

3) H^n — риманово мн-е.

Док-во: $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \Rightarrow$ 1) и 2)

3). $H^n = \{q(x) = -1\}^\circ$; $T_x H^n = \operatorname{Ker} dq_x = \{y \mid \langle x,y\rangle = 0\} = \langle x\rangle^\perp$.

Поскольку $\langle x,x\rangle < 0$, тогда $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\langle x\rangle^\perp} > 0$.

След., $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — гл. полож. опр. билин форма на всех $T_x H^n$. $\boxtimes$

Теор (док-во на след лекции)

1) $\operatorname{Isom} H^n = O^+_{n,1}(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T I_{n,1} A = I_{n,1},\ A(H^n) = H^n\}$

2) Геодезические в H^n — сечения H^n двумерными пл-тями.

3) Геодезические в H^n зад. ур-ями $\gamma(t) = \cosh(t)\cdot p + \sinh(t)\cdot v$, $p \in H^n$, $v \in T_p H^n$.

4) $\cosh \rho(p,q) = |\langle p,q\rangle|$.