Гиперболическая геометрия и пространства Лобачевского

Лекция 1: введение и предварительные сведения

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

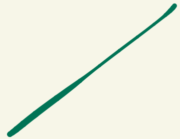
Содержание

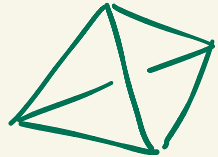
1. Введение: что изучаем, какие объекты и структуры, значение гиперболической геометрии

2. Предварительные сведения.

Введение: что изучаем, какие объекты и структуры, значение гиперболической геометрии в мире фундаментальной и прикладной математики

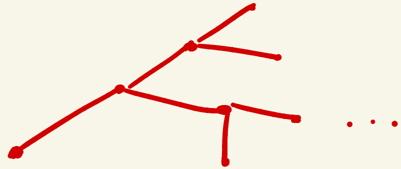
1. Что такое «Геометрия»?



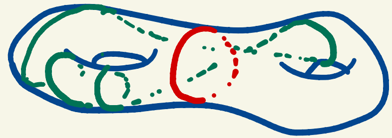


Геометрические объекты:

а) линейные: прямые, плоскости, подпространства, многогранники



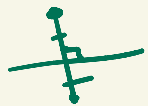
б) дискретные: системы точек в пространстве, графы, дискретные сетки



в) гладкие: кривые, поверхности, многообразия

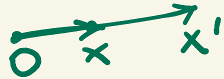
Группы преобразований:

- группы движений/изометрий: переносы, повороты, отражения, ...



- группы симметрий множеств (многогранников, графов, ...)
- группы аффинных преобразований: гомотетия, ...

$\overrightarrow{OX'} = \lambda \overrightarrow{OX}$

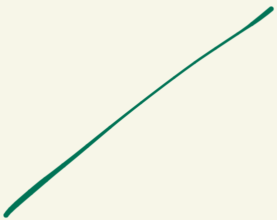


- группы гомеоморфизмов, диффеоморфизмов, полиномиальных морфизмов, ...

2. Дифференциальная геометрия и риманова геометрия

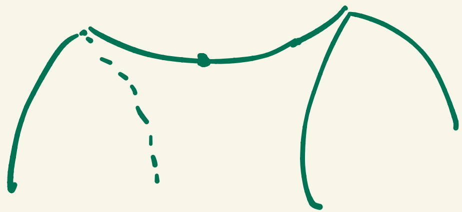
Дифф. геометрия — гладкие кривые, поверхности, многообразия

Риманова геометрия (Riemannian geometry) — римановы многообразия (снабженные метрикой), кратчайшие линии (геодезические), кривизна (curvature), углы между кривыми, площади, объемы, и т.д.



кривизна = 0

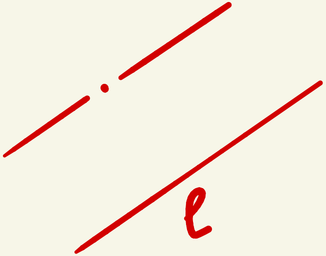
$k \equiv 1$



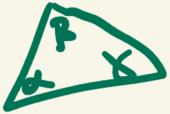
$K < 0$

3. Евклидова и неевклидова геометрии

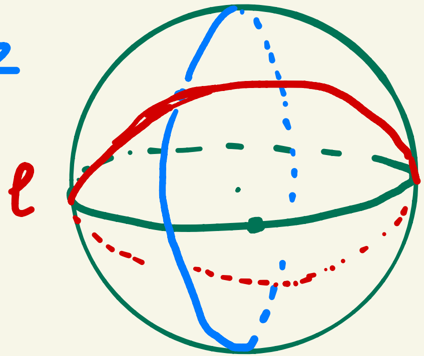
E^2



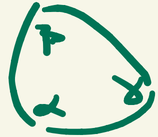
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$



S^2



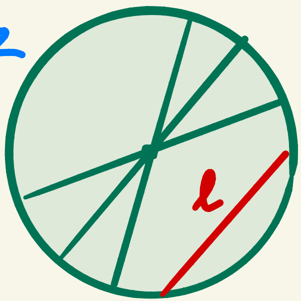
$\alpha+\beta+\gamma>\pi$

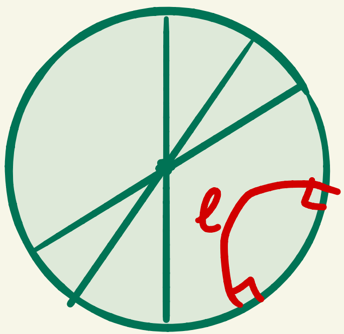


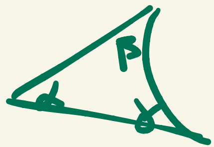
Открытие пространства Лобачевского H^n — одно из величайших научных открытий 19 века.

Первая официальная публикация — 1829 год, Н.И. Лобачевский. Параллельно этим занимались К. Гаусс и Я. Бойяи.

H^2







$\alpha+\beta+\gamma<\pi$

4. Геометрии и группы — эрлангенская программа Клейна, модельные геометрии, программа геометризации Терстона

Геометрия — пара (G, X), где G — группа преобразований, действующая на множестве X

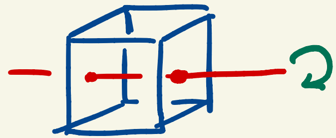
Примеры:
а) школьная планиметрия, по сути, состоит из двух частей

$\mathrm{Isom}(E^2) \curvearrowright E^2 \cong \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$

б) аналогично школьная стереометрия

в) (Sym(P), P) — группа симметрий многогранника P



г) более общо: группы изометрий метрических пространств Isom(X), группы гомеоморфизмов Homeo(M) и группы диффеоморфизмов Diffeo(M) многообразий, группы автоморфизмов Aut(X) алгебраических многообразий X, ...

д) конечно-порожденные группы, дискретные группы - геометрическая теория групп

Модельные геометрии

Модельная геометрия (G, X) — односвязное гладкое многообразие X с транзитивным действием группы Ли G

$(\mathrm{Isom}(E^n), E^n)$

$\mathrm{Isom}\, E^n = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$

$(\mathrm{Isom}(S^n), S^n)$, где $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathrm{Isom}(S^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$

Геометризация 2-мерных поверхностей: теорема об униформизации

Теорема об униформизации

Всякая односвязная риманова поверхность (1-мерное комплексное многообразие) конформно эквивалентна либо открытому диску в $\mathbb{C}$, либо сфере Римана $\mathbb{C} \cup \infty$, либо комплексной плоскости. Таким образом, всякая 2-мерная поверхность без края принадлежит одному из трех типов: S^2/Γ, $\mathbb{R}^2/\Gamma$, H^2/Γ

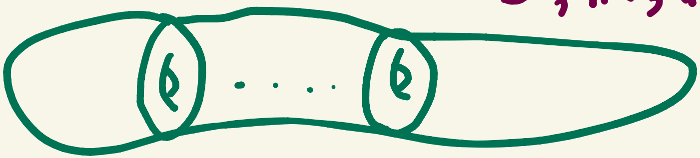
Классификация пов-тей: S^2 $\quad \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ $\quad S_{g\geq 2} = H^2/K_g$

Программа геометризации Терстона: 3-многообразия

Теорема (Thurston's Geometrization Conjecture 1982 = Perelman's Theorem 2002-2003)

Всякое связное компактное 3-многообразие M с (возможно, пустой) границей, состоящей из 2-мерных торов, можно так разрезать на блоки вдоль конечного семейства попарно непересекающихся торов, что внутренность каждого блока будет реализовывать одну из 8 модельных геометрий.

То есть, int(block) = X/Г, где Г < Isom(X) — дискретная группа движений, действующая свободно на пространстве X: $S^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3, S^2\times\mathbb{R}, H^2\times\mathbb{R}, Nil, Sol, \widetilde{SL_2}$.



Теорема (Фундаментальная теорема дифференциальной топологии)

$M \approx N$

Пусть M и N — два гладких n-многообразия, n<4. Если M и N гомеоморфны, тогда они и диффеоморфны. При n>3 это неверно.

$M \cong N$

Замечание: обобщенная гипотеза Пуанкаре верна для всех n в категории топологических многообразий (Фридман и Смейл), но для гладких верна при n=1,2,3,5,6, а при n=4 до сих пор открыта. При n=7 известны контрпримеры (Милнор).

Теорема (гипотеза Пуанкаре)

Всякое односвязное компактное 3-многообразие диффеоморфно S^3.

Роль пространства Лобачевского в маломерной геометрии и топологии:

Теорема (гиперболизации)

Всякое связное компактное 3-многообразие M без края, для которого

$\operatorname{card} \pi_1(M) = \infty$

$\pi_1(M) \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

является гиперболическим, то есть $M \cong H^3/\Gamma$, где $\Gamma < \operatorname{Isom}(H^3)$.

дискр, своб.

Теорема Терстона о классификации узлов (Теория узлов)

Пусть K — узел в 3-сфере. Если K — не торический и не сателлитный, то $S^3 \setminus K \cong H^3/\Gamma$.

Насколько много гладких структур в одной геометрии? Сложнейший вопрос!

Для гиперболических (n>2)-многообразий — теоремы жесткости Мостова, Прасада, Маргулиса.

Для n=2 — теория пространств модулей, теория Тайхмюллера, mapping class groups.

Предварительные сведения

Группы преобразований

Мн-во G – группа, если

1) $g_1 \cdot g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G$
2) $\exists 1: \ g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$
3) $\forall g \ \exists g^{-1} \in G: \ g \cdot g^{-1} = 1 (= e) = g^{-1} \cdot g$

4) ассоциативность $(ab)c = a(bc)$

Опр
$f: X \to X$ – движ/изометрия, если
$\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b))$.

$H \overset{\text{подгр}}{<} G$ – нормальна, если
$gH = Hg$ $\left(\Longleftrightarrow gHg^{-1} = H \right)$
$\forall g \in G$

$\forall h_1 \ \exists h_2: \ g h_1 g^{-1} = h_2$

Обозн. $H \triangleleft G$

Пусть $H = G_x = \{g \mid gx = x\}$.
$aga^{-1}(x) = ag(a^{-1}x) \overset{?}{=} x$ – увы, вообще говоря,
$g(a^{-1}x) \overset{?}{=} (a^{-1}x)$ не норм. подгр, но если $H(ax) = ax \ \forall a \in G$,
то $H \triangleleft G$.

$G \curvearrowright X$ (действует на), если задано
отобр. $(g, x) \mapsto gx \in X$
(согласовано с групповой стр-рой G)

Напр $x \xrightarrow{g} y = gx$
$g^{-1}gx = x \xleftarrow{g^{-1}} y = gx$

Пусть $G \curvearrowright X$
Орбиты $Gx = Orb(x) =$
$= \{gx \mid \forall g \in G\} \subset X$

Стабилизатор
$G_x = Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$
$G_x < G$.

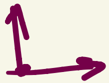
Если $\varphi: G \to H$ – гомоморфизм,
то $\ker \varphi = \varphi^{-1}(e) \triangleleft G$

Примеры 1) В абелевой группе все подгр. норм

2) Если индекс $= [G:H] = \mathrm{card}(G/H) = 2$, то $H \triangleleft G$

3) $[G : G_x] = \mathrm{card}(Gx)$.

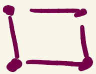
4) $G = T_{e_1,e_2} \cong \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$



$x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + m, \; x_2 + n) = x + me_1 + ne_2$

$G(0,0) = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$

Всякая орбита $Gx \cong \mathbb{Z}^2$, $G_x = 1$.



5) $G = \mathrm{Sym}($  $)$

6) $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{\det A = 1\}$.

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\ker \det = SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n$

($\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ − гомоморф)

1) **Опр** (произв групп)

$G = G_1 \times G_2$, где $G_j \triangleleft G$

$\forall g = g_1 \cdot g_2$ − $\exists$ единств. разл $\Leftrightarrow$ $G_1 \cap G_2 = 1$.

2) полупр. произв. $G = N \rtimes H$, если $\forall g = n \cdot h$; $N \triangleleft G$, $N \cap H = \{1\}$.

$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*}$.

6. Дифференцируемые функции. Дифференциал и его геометрический смысл.

Опр. 1) $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ назыв. дифф. в т. $a \in \mathbb{R}^n$, если $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – лин. оператор, т.ч.

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(a+v) - F(a) - Av\|}{\|v\|} = 0$$

$F = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, $\mathbb{R}^n$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \Big| \dots \Big| \frac{\partial F}{\partial x_m} \right)$$

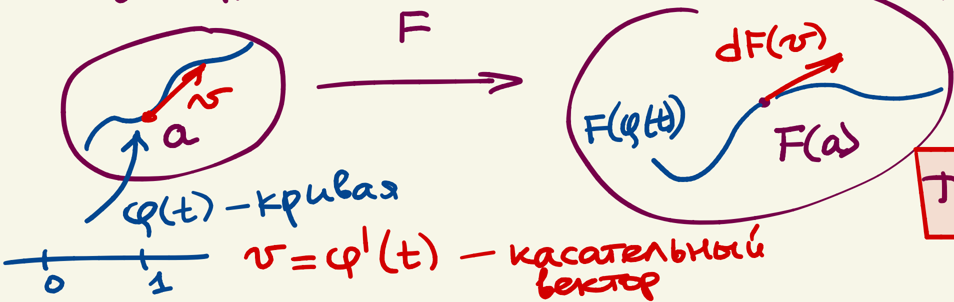
2) Обозн: $A = dF$; Утв: $\mathrm{Mat}(dF) =$ Матр. Якоби $= \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n}}$

3) $F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, если $\dfrac{\partial^k F}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ сущ. и непр.

$F \in C^\infty$, если $F \in C^k$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots$.

Геометрический смысл дифференциала

$U \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad\qquad$ $V \subset \mathbb{R}^m$



$dF(v)$ – касат. вектор к кривой $F \circ \varphi(t)$ в т. $F(a)$.

$$\boxed{\text{т.е. } d_aF: T_aU \to T_{F(a)}V}$$

7. Теоремы о неявной и обратной функциях

Теорема об обратном отображении

Пусть $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $F \in C^k(\mathbb{R}^n)$; $dF \in GL(\mathbb{R}^n)$ в т. $a \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\exists \underset{\text{окр-ть}}{U_0} \ni a$, $\underset{\text{окр-ть}}{V_0} \ni F(a)$: $F|_{U_0} : U_0 \to V_0$ — C^k-диффеоморфизм,

т.е. $F|_{U_0}$ — биективно; $F|_{U_0}, F^{-1}|_{V_0} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ в a и $F(a)$ соотв.

Теорема об неявной функции

Пусть $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in C^k(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$; $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и

$F(a,b) = 0$. Пусть $dF_{(a,b)} = \Big(\overbrace{dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^n}}^{A_1} ; \overbrace{dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^m}}^{A_2} \Big)$ — т.ч.

$dF_{(a,b)}|_{\mathbb{R}^n} \in GL(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\exists \underset{\text{откр}}{U} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и $\underset{\text{откр}}{V} \subset \mathbb{R}^m$, т.ч.

$(a,b) \in U$ и $\forall y \in V$ $\exists!\, x = g(y)$, где $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$, $g(b) = a$,

$F(g(y'), y') = 0$ для всех $y' \in V$ и $dg_b = -A_1^{-1} \cdot A_2$.

8. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

Опр. Гладкое d-мерное подмн-е в $\mathbb{R}^n$ — такое мн-во, которое локально есть образ регулярного отобр-я: $F:\underset{\mathcal{U}}{\mathbb{R}^d}\to\mathbb{R}^n$; $d\le n$; rank dF — максимален в каждой точке $x\in\mathcal{U}$, т.е. rank $dF = d$.

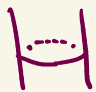
Эквив. задание подмн-й $\xrightarrow{\text{лок}}$ $\begin{cases} x_{d+1}=\varphi_{d+1}(x_1,\dots,x_d)\\ \dots \\ x_n=\varphi_n(x_1,\dots,x_d)\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{лок}}$ $\begin{cases}F_1(x_1,\dots,x_n)=0\\ \vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_n)=0\end{cases}$; где $m=n-d$ и $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=m$.

Примеры 1) $d=0$ — дискр. подмн-во; $d=n$ — $\underset{\text{откр.}}{\mathcal{U}}\subset\mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$ — k-мерная плоскость;

3) $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$; $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid (x,x)=1\}$.

4) Любая регулярная пов-ть $F:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$, где $\operatorname{rank}(dF)=d$ (без изломов — вложенные подмн-я в $\mathbb{R}^n$). Напр.  или 

9. Абстрактные гладкие многообразия с краем

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Опр. Внутренняя карта – пара (U, φ), где $U \underset{\text{откр.}}{\subset} M$, $\varphi : U \underset{\text{homeo}}{\xrightarrow{\approx}} \mathbb{R}^n$ (гомеоморф.)

Краевая карта – (V, ψ), где $\psi : V \to U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} = \mathbb{R}^n_+$ (upper half-space)

Опр. (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) согласованы, если функции "склейки"

$\varphi_{12}: \ \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (гладкие).

Опр. Атлас на M – система попарно согл. карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Опр. Гладкое n-мерное многобразие (n-многообразие) – это хаусд. топ. пр-во, снабж. системой эквив. атласов.

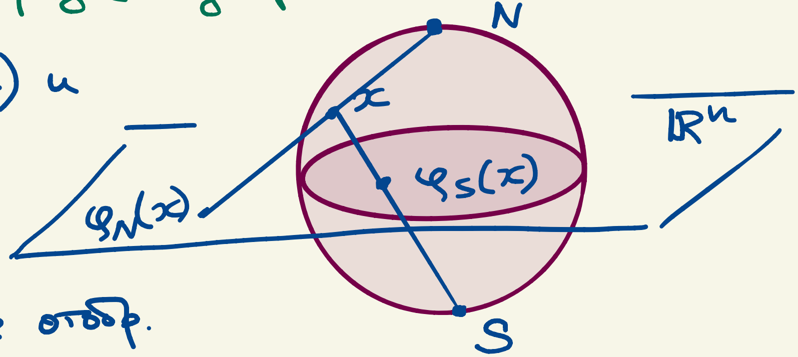
Край ∂M мн-я M – это прообразы всех граничных точек в краевых картах, т.е. $\partial M = \{\psi^{-1}(\{x_n = 0\}) \mid (V, \psi) \text{ – краевая карта}\}$.

Многообр. с краем, если $\partial M \neq \emptyset$, и без края, если $\partial M = \emptyset$.

Примеры 1) $\mathbb{R}^n$ — 1-карта $(\mathbb{R}^n, id)$; $U \subset \mathbb{R}^n$ откр. областъ.
$\partial \mathbb{R}^n = \varnothing$

2) Замкн. шар $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$; $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$.

3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкое n-многообразие без края. Миним. атлас состоит из 2 карт: $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$. Проверьте, что



1) $\varphi_N : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ - гомеоморфизм
2) $\varphi_{NS} : \varphi_N(x) \longmapsto \varphi_S(x)$ - гладкое отобр.

4) $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ — n-мн-е, $\partial U^n = \mathbb{R}^{n-1}$.

5) $\mathbb{R}P^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ — проективное n-мерное пр-во $= \{\underset{\text{прямая}}{\ell} \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell \ni \{0\}\}$.

Атлас из n+1 карты: $U_j = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mid x_j \neq 0\}$.

Метрическая топология на $\mathbb{R}P^n$: $\rho(x,y) = \angle(x,y)$, x, y - прямые.

$\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$; $\varphi_j(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$.

6) $f: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое регулярное отобр. Тогда

$M = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ является гладким m-мерным (под)мн-ем.

(Атлас карт строится на основе теор. о неявной/обратной ф-ции).

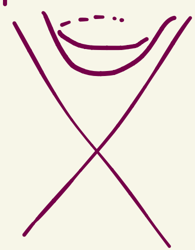
7) Аналогично, если $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} f_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ f_k(x) = c_k \end{matrix} \right\} \neq \emptyset$ задано сист. ур-ий, т.что $\operatorname{rank} J(f_1, \dots, f_k) = k$ всюду на M, тогда M явл. гладким $(n-k)$-многообразием.

Частные случаи: 7.1) $S^n = \{ x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \}$

7.2) $H^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; \begin{matrix} -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1 \\ x_0 > 0 \end{matrix} \right\}$

7.3) $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in Mat_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(A) = 1 \}$

H^n



$\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$, т.к. $\det(A)$ – гладкая регулярная функция от $(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.

7.4) $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \mid AA^T = E \} \subset GL_n(\mathbb{R})$; $SO_n = O_n \cap SL_n$

$\dim O_n = n(n-1)/2$