Группы

1. В первых 4 пунктах G — группа.

   (a) Докажите, что нейтральный элемент единственный.

   (b) Могут ли существовать два различных правых обратных элемента?

   (c) Могут ли существовать два различных разносторонних обратных?

   (d) Докажите, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

   (e) Пусть G — такое множество с ассоциативной операцией, что существует такой элемент $e \in G$, что $ge = g$ для всех $g \in G$, а также, что для всякого $g \in G$ существует g^{-1}, для которого $gg^{-1} = e$. Докажите, что G — группа.

2. (a) Докажите, что $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — группа. Она называется *циклической*.

   (b) Приведите примеры конечной и бесконечной циклических групп.

   (c) Пусть $g^n = e$, тогда $\operatorname{ord} g \mid n$. (Здесь $\operatorname{ord} g = \min\limits_{k \in \mathbb{N},\, g^k = e} k$.)

   (d) Если $g^m = g^n$, то $m \equiv n \pmod{\operatorname{ord} g}$.

   (e) Докажите, что подгруппа циклической группы циклическая.

3. (a) Верно ли, что $\operatorname{ord}(g^n) = \frac{\operatorname{ord} g}{(\operatorname{ord} g,\, n)}$?

   (b) Верно ли, что из $ab = ba$ следует, что $\operatorname{ord}(ab) \mid \text{нок}(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b)$?

   (c) Чему может равняться $\operatorname{ord}(ba)$, если $\operatorname{ord}(ab) = n$?

4. Пусть $\operatorname{ord} g$ — нечетный. Верно ли, что найдется такой $a \in G$, что $g = a^2$?

5. Докажите, что группа, все элементы которой имеют порядок 2, абелева.

6. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка 2?

7. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы H также является левым смежным классом подгруппы H. Верно ли, что H нормальна?

8. Докажите, что подгруппа индекса 2 нормальна.

9. Две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.

10. Известно, что любая подгруппа конечной группы G нормальна. Верно ли, что G абелева?