

**МНОГОМЕРНЫЕ АФФИННЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**

1. В трёхмерном аффинном пространстве заданы две скрещивающиеся прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Верно ли, что прямые  $(pq)$ , где  $p \in \ell_1, q \in \ell_2$ , замечают всё пространство?
2. Приведите пример конечномерного пространства  $V$  и трёх попарно трансверсальных (т.е. пересекающихся по началу координат) подпространств  $U, W, T \subset V$  таких, что  $\dim U + \dim W + \dim T = \dim V$ , но  $U + W + T \neq V$ .
3. Может ли пересечение положительного ортанта  $\{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^4$  с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом?
4. Пусть  $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$  для некоторых подпространств в  $\mathbb{R}^n$ . Обязательно ли  $U + V$  равно одному из подпространств  $U, V$ , а  $U \cap V$  — другому?
5. Опишите ГМТ в  $\mathbb{R}^3$ , равноудалённых от
  - (а) двух скрещивающихся прямых,
  - (б) двух точек и прямой, не лежащих в одной плоскости.
6. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на гиперплоскость тоже тупой?
7. В стандартном  $n$ -мерном кубе  $\mathbb{I}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq 1\}$  найдите
  - (а) количество диагоналей, перпендикулярных данной;
  - (б) длину диагонали и её предел при  $n \rightarrow \infty$ ;
  - (с) угол между диагональю и ребром, выходящими из одной вершины, и его предел при  $n \rightarrow \infty$ .
8. Сколько 3-мерных плоскостей симметрии у 4-мерного куба?
9. В стандартном  $n$ -мерном симплексе  $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_j = 1, x_k \geq 0\}$  найдите
  - (а) радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при  $n \rightarrow \infty$ ;
  - (б) угол между ребром и не содержащей его гранью.
10. Найдите объём правильного четырёхмерного симплекса, вписанного в шар радиуса 1.