Многообразия с краем

I Многообр-я без края:

- Карта: (U,φ), где $\varphi: U \xrightarrow{\text{гомео}} \mathbb{R}^n$
- карты (U,φ) и (V,ψ) соглас., $B^n \subset \mathbb{R}^n$ откр.
  если $\varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Если $M = \underbrace{\bigcup_\alpha (U_\alpha,\varphi_\alpha)}_{\text{атлас}}$, где φ_α и φ_β соглас., то M снабжается структурой гладкого многообр.

Опред.

Примеры. 1. $\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n$ (1 карта)

2. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (2 карты или 6 карт)

3. $\underset{\text{1 карта}}{H^n} \cup \underset{\text{1 карта}}{-H^n} = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2+x_1^2+\dots+x_n^2=-1\}$

4. Если $f: U\subset\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — C^∞, рег., то $f(U)=M$ — гладкое многообр.

5. $M\subset\mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, если в окрестности каждой точки $x\in M$ оно задается как в п.4. (т.е. локально M — граф)

лок. экв.

$$\sim \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n) \\ \vdots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n). \end{cases}$$

Упр. Чему равно k для п.4?

II Многообр-я с краем.

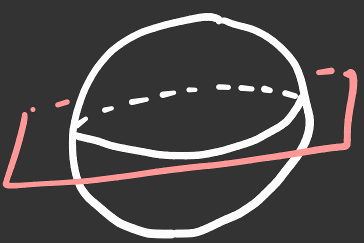
Многообразие с краем – это хаусд. топ. пр-во со счетной базой, допускающее атлас из карт двух типов:

- обычные (U,φ), где $\varphi: U \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$
- краевые (V,ψ), где $\psi: V \to \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$

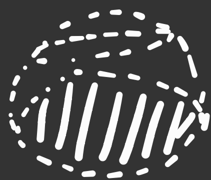
Край $\partial M = \{x \in M \mid \exists$ краевая карта $(V,\psi) : x \in \psi^{-1}(x_n = 0)\}$

Примеры:

1. $\overline{B^n} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда край $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$



Карты: (B^n, id) – обычные

 $\approx$  $\approx \mathbb{R}^n_+$ ← Краевая карта

открытое! (диск снизу вырезан целиком)

(6 краевых карт)

2.  $\subset \mathbb{R}^3$ – поверхность пустого ограниченного цилиндра. $= S$.

$\partial S = S^1 \cup S^1$, причем S – явл. 2-мерным многообр.

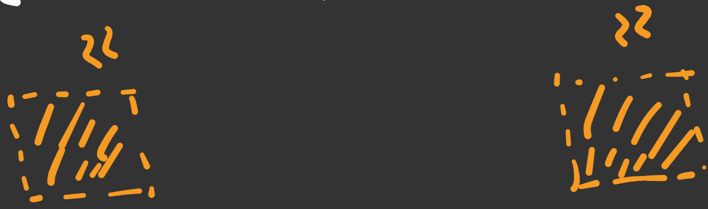
Ясно, что неогр. цилиндр S^1 – 2мерное подмн-е бу края

Напр., можно взять 2 карты $S^1 \setminus \ell_1$ и $S^1 \setminus \ell_2$.
$\approx \mathbb{R}^2$ $\approx \mathbb{R}^2$

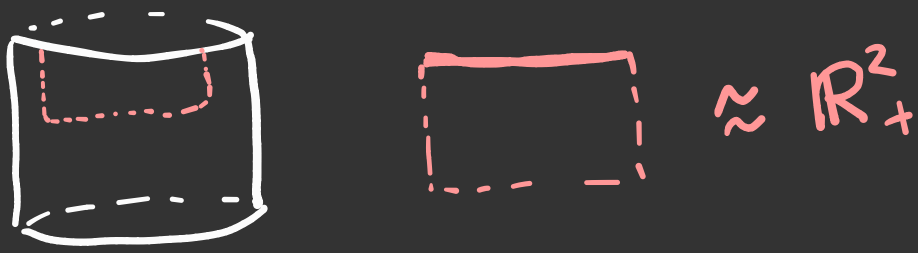
$\approx \mathbb{R}^2$

Рассмотрим теперь S:

Возьмем карты: $S \setminus (l_1 \cup S^1 \cup S^1)$, $S \setminus (l_2 \cup S^1 \cup S^1)$
(обычные)



Краевые:



Теор. Край ∂M для n-мерного C^∞-многообр является гладким $(n-1)$-многообразием без края!