Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 5: Дискретные поверхности

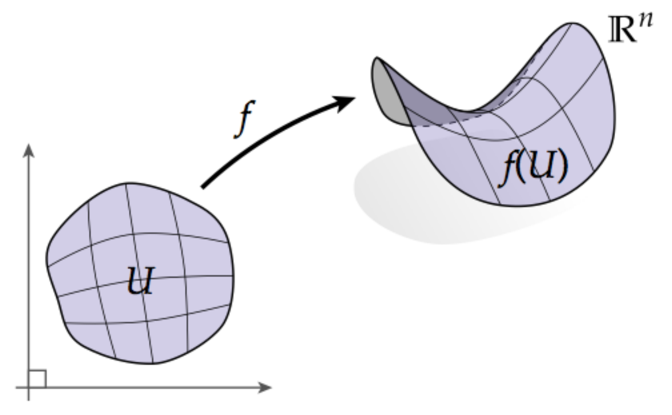
Богачев Николай Владимирович

29 сентября 2021

Skoltech & MIPT

Вторая квадратичная форма

Гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ — тоже многообразие!!



I квадратичная форма

Пусть $M = f(U)$, $p \in M$. Тогда на T_pM есть $(\cdot, \cdot)$.

Матрица I квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

Тогда

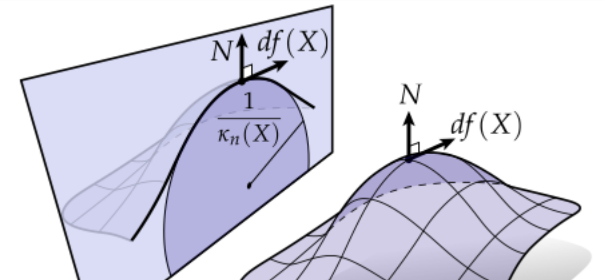
$$g(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle = X^T G Y := I(X, Y).$$

Здесь $G = J_f^T \cdot J_f$, где J_f — матрица Якоби отображения f.

Нормальная кривизна

По определению: кривизна (со знаком! в зависимости от сонаправленности векторов нормалей поверхности и кривой) нормального сечения поверхности плоскостью!

$$k_n(X) = \frac{\langle df(X), dN(X) \rangle}{\langle df(X), df(X) \rangle}$$



Оператор формы (Shape Operator)

$$S\colon T_pM \to T_pM, \quad df(SX) = dN(X) \qquad (df \circ S = dN)$$

Главные направления — собственные векторы S!

Главные кривизны — собственные значения S!

S — самосопряженный оператор.

$\mathbb{I}$ квадратичная форма

$$\mathbb{I}(X, Y) := -g(SX, Y) = -\langle df(SX), df(Y)\rangle = -\langle dN(X), df(Y)\rangle.$$

Заметим, что

$$\mathbb{I} = I \cdot S.$$

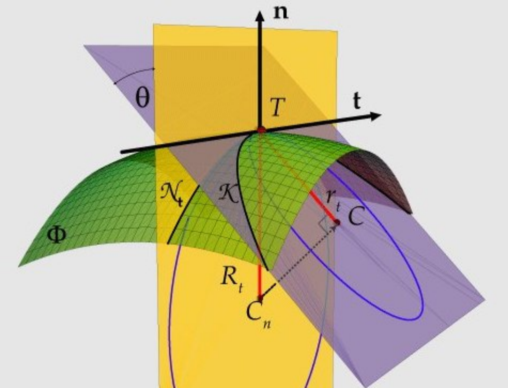
Матрица $\mathbb{I}$ квадратичной формы:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \langle N, f_{uu}\rangle & \langle N, f_{uv}\rangle \\ \langle N, f_{uv}\rangle & \langle N, f_{vv}\rangle \end{pmatrix}.$$

Теорема Менье

t — вектор скорости к $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}_t$ — нормальное сечение плоскостью $\langle n, t\rangle$, $n(\mathcal{K})$ — вектор гл. нормали к $\mathcal{K}$, $\theta = \angle(n, n(\mathcal{K}))$. Тогда

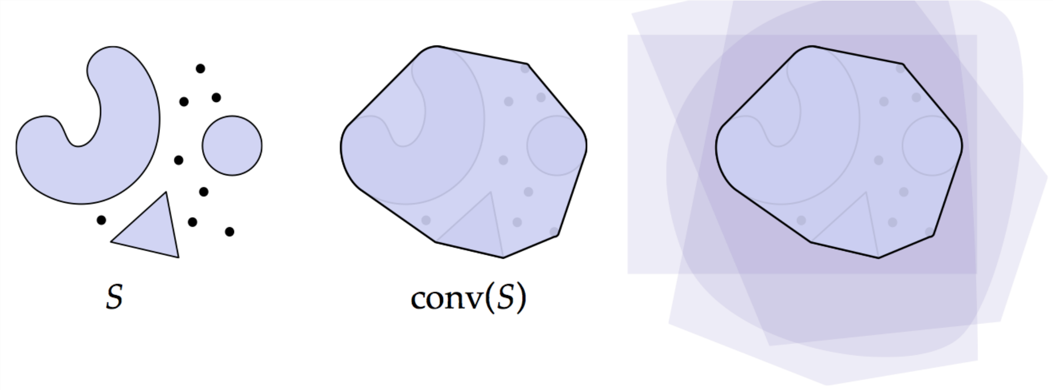
$$k(\mathcal{N}_t) = k(\mathcal{K})\cos\theta = \frac{\mathbb{I}(t,t)}{I(t,t)}.$$



Дискретные поверхности

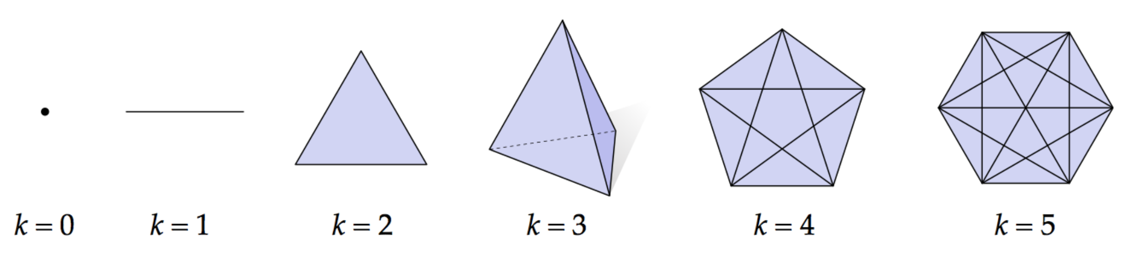
Выпуклая оболочка

Для множества $S \subset \mathbb{R}^n$ его выпуклая обочка $conv(S)$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее S.



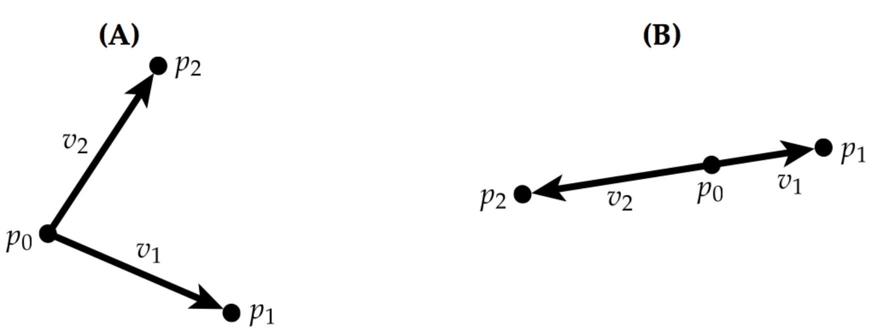
Симплексы

Точка, отрезок, треугольник, тетраэдр и т.д.



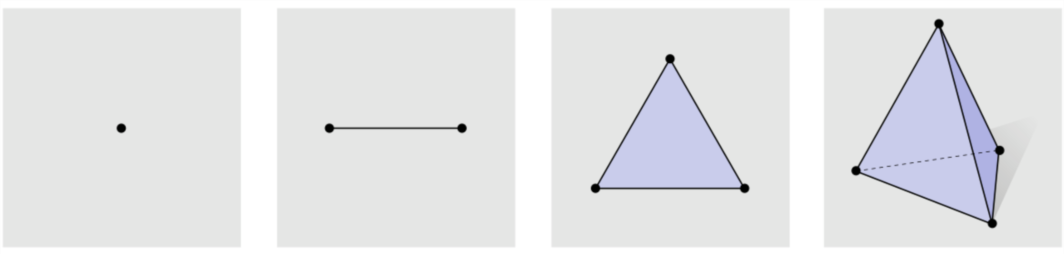
Аффинная независимость

Точки $p_0, \ldots, p_n$ аффинно независимы, если векторы $v_k = p_k - p_0$ линейно независимы.



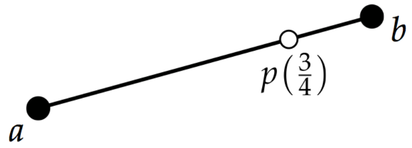
Симплексы: формальное определение

k-симплекс — выпуклая оболочка $(k+1)$ аффинно независимой точки.



Барицентрические координаты

Как задать 1-симплекс?



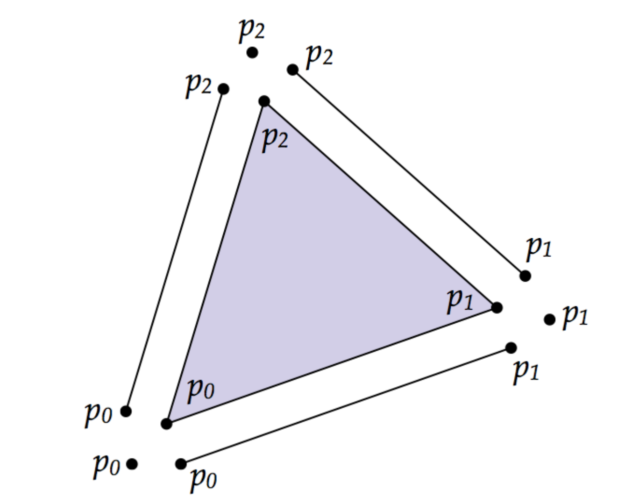
$$p(t) := (1-t)a + tb, \quad t \in [0,1]$$

Аналогично для k-симплекса:

$$\sigma_k = \left\{ \sum_{k=0}^{n} t_k p_k \mid \sum_{k=0}^{n} t_k = 1,\ t_k \geq 0\ \forall k \right\}.$$

Грани симплекса

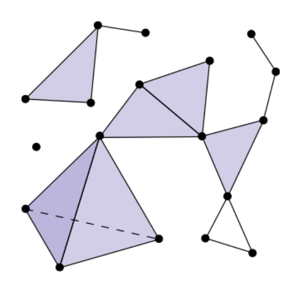
Грани симплекса — симплексы меньшей размерности.



Симплициальный комплекс

Геометрический симплициальный комплекс — это такое семейство σ симплексов, что

- все грани симплексов тоже входят в σ и
- пересечение любых двух симплексов из σ является их общей гранью.



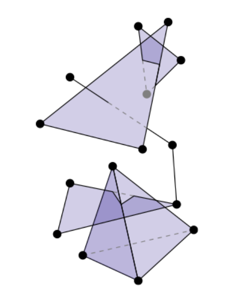


Рис. 1: Геометрический симплициальный комплекс и «некомплекс»

Линк и звезда

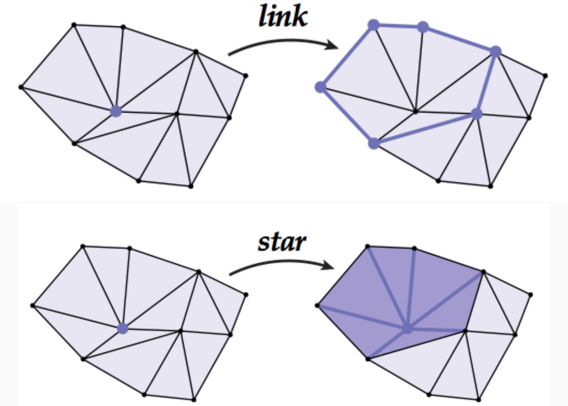


Рис. 2: Линк и звезда вершины комплекса

Многообразия

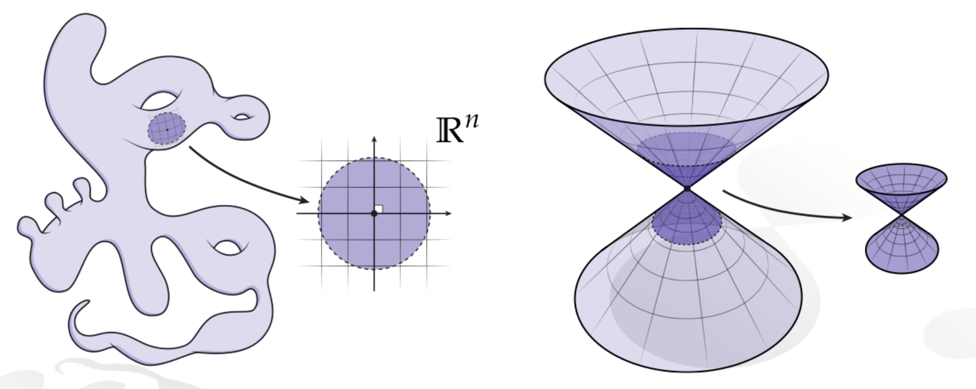
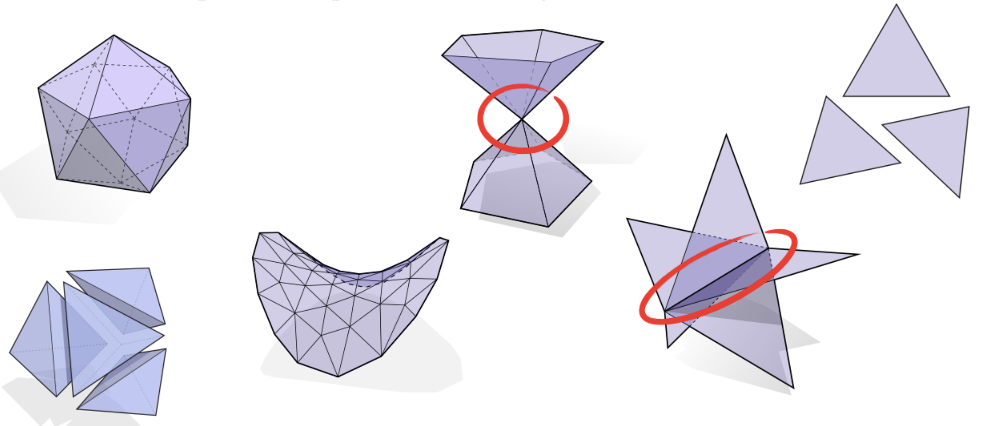


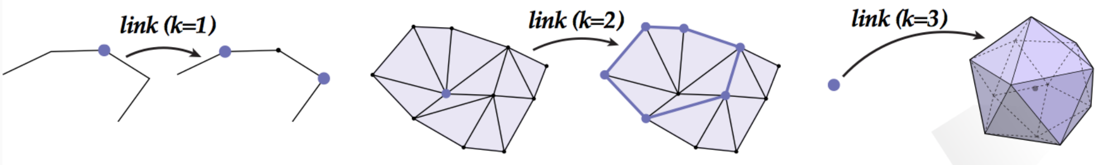
Рис. 3: Многообразие и не многообразие. Почему?

Что здесь выглядит как многообразие?



Симплициальные поверхности и многообразия

Симплициальная поверхность — это симплициальный k-комплекс, в котором линк всякой вершины гомеоморфен $(k-1)$-мерной сфере (а звезда $\simeq$ шару!).



Согласованная ориентация

Согласованная ориентация на смежных симплексах — когда на общей грани она противоположна.

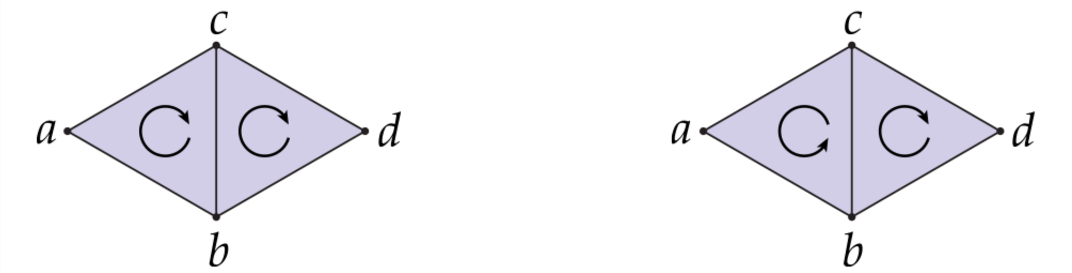
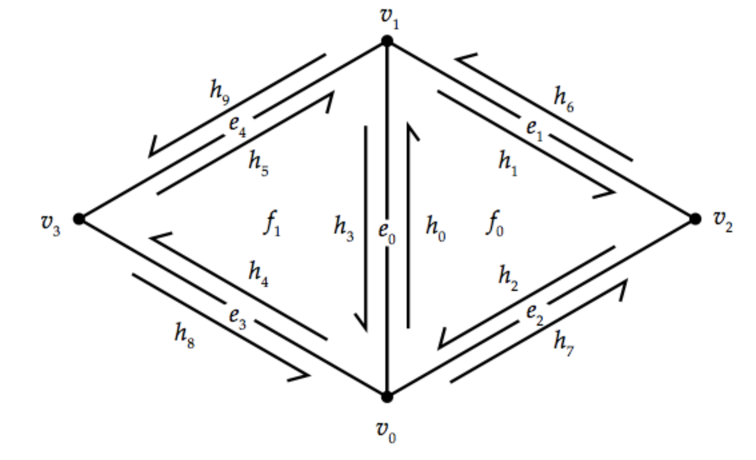


Рис. 4: Где какая?

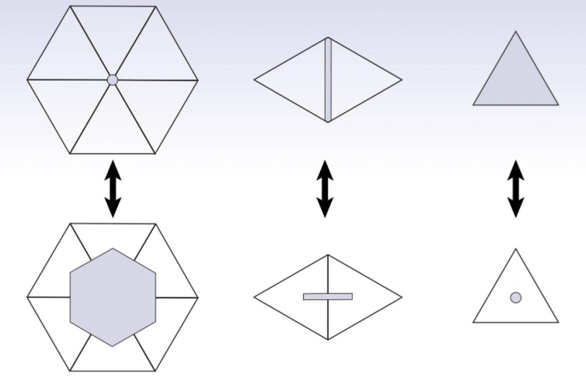
Полуребра

Можно задавать комплекс полуребрами.



Двойственная сетка

Симплициальная поверхность — сетка $\{V, E, F\}$.*Двойственная сетка* — $\{V^*, E^*, F^*\}$. Вершина $f^* \in V^*$, двойственная грани $f \in F$, является центром (описанной окружности) этой грани. Ребро $e^* \in E^*$ соединяет центры граней исходной сетки, смежных по ребру $e \in E$.



Список литературы:

[1] Keenan Crane — Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction, 2018.

[2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.

[3] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет.