Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 2: Геометрия кривых и поверхностей

Богачев Николай Владимирович

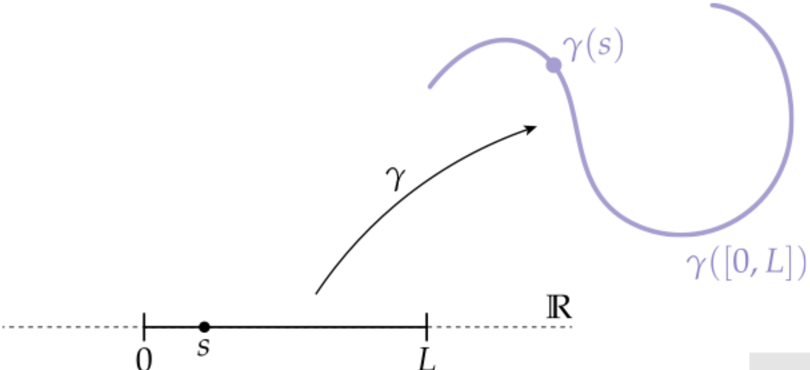
8 сентября 2021

MIPT & Skoltech

Геометрия плоских кривых

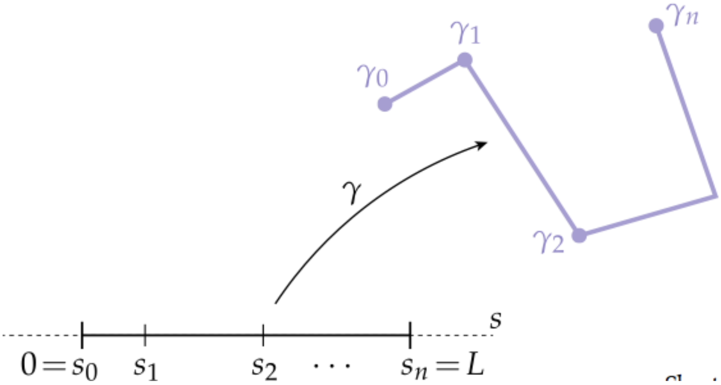
Плоские кривые

- **Гладкая кривая** на $\mathbb{R}^2$ — гладкое отображение $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$
- Вектор **скорости** — $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$.



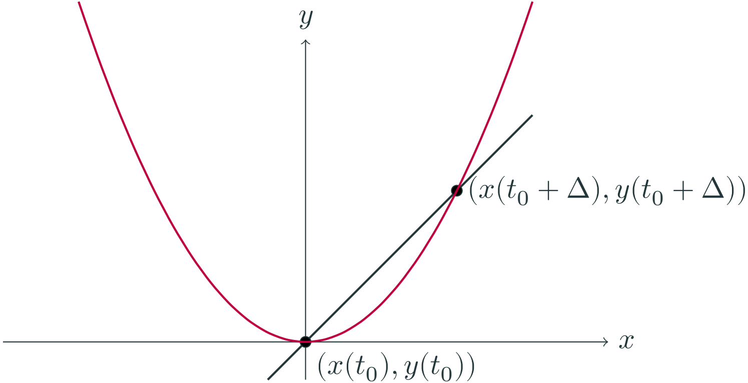
Дискретные кривые

- **Дискретная кривая** на $\mathbb{R}^2$ — кусочно-линейная функция
- Вектор **скорости** — а вот что это?



Касательный вектор

- **Касательная** к кривой $\gamma(t)$ в точке t_0 — предельное положение секущей через точки t_0 и $t_0 + \Delta$ при $\Delta \to 0$.
- Это и есть вектор **скорости**?



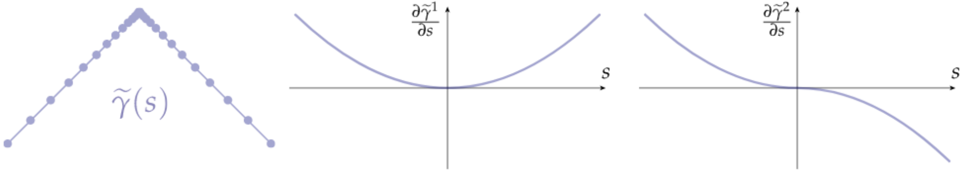
Регулярные кривые

Кривая **регулярная** — $\gamma'(t) \neq 0$ (то есть погруженная).

- Consider the reparameterization of a piecewise linear curve:

$$\eta(s) := s^3 \qquad \gamma(s) := \begin{cases} (s, s) & s \leq 0 \\ (s, -s) & s > 0 \end{cases} \qquad \tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} (s^3, s^3) & s \leq 0, \\ (s^3, -s^3) & s > 0 \end{cases}$$

- Even though the reparameterized curve has a continuous first derivative, this derivative goes to zero at $s = 0$:



Не сможем определить касательную, нормаль, кривизну...

Определение

Две гладкие регулярные кривые **касаются в точке** P*, если они обе проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную.*

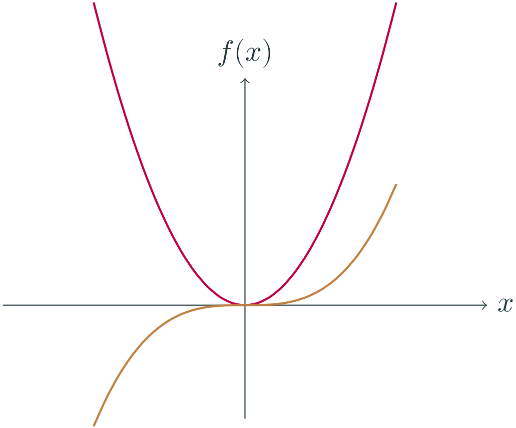
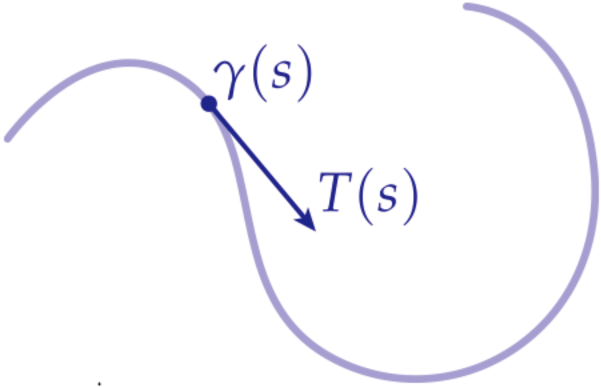


Рис. 2: $y = x^2, y = 1/5x^3$

Единичный вектор скорости к кривой γ — это (нормированный) вектор скорости $T(s) := \gamma'(s)/\|\gamma'(s)\|$.



Длина дуги кривой. Натуральный параметр

Длина кривой γ —

$$L(\gamma) := L(\gamma)[a,b] := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Натуральный параметр s: $s - a = L(\gamma)[a,s]$. Тогда $\gamma(s)$ — **натуральная параметризация**.

Пусть $\dot\gamma := d\gamma/ds$. Ясно, что $\|\dot\gamma\| = 1$.

Натуральную параметризацию можно найти:

$$s(t) = \int_a^t \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|\,dt.$$

Предложение

Длина кривой не меняется при монотонной замене параметра.

Доказательство.

Если $t = t(\tau)$, то $\gamma_1 := \gamma \circ t$ и

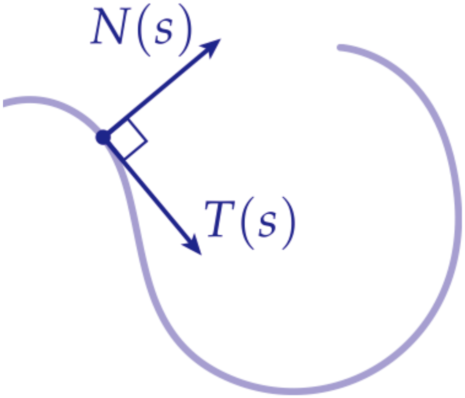
$$L(\gamma_1) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma_1}{d\tau} \right\| d\tau = \int_{t(a)}^{t(b)} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \cdot \frac{d\tau}{dt}\, dt = L(\gamma).$$

$\square$

Вектор нормали

Нормаль к кривой γ — перпендикуляр к касательной.

Направляющий вектор нормали — $N(s) := (-y'(s), x'(s))$.



Гладкие регулярные кривые $r_1(s)$ и $r_2(s)$ имеют в точке 0 **касание порядка** k, если

$$r_1(0) = r_2(0), \quad \dot{r}_1(0) = \dot{r}_2(0), \quad \dots, \qquad r_1^{(k)}(0) = r_2^{(k)}(0).$$

Лемма о перпендикулярности

Пусть $a\colon t \mapsto a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор-функция, причем $|a(t)| \equiv const$. Тогда $a'(t) \perp a(t)$.

Доказательство.

Продифференцируем $(a(t), a(t)) = const^2$ и получаем $2(a(t), a'(t)) = 0$. $\square$

Теорема (о соприкасающейся окружности)

Пусть $\gamma(s)$ — рег. кривая и $\ddot{\gamma}(s_0) \neq 0$. Тогда $\exists!$ окружность, имеющая в точке s_0 касание второго порядка с γ, причем

(1) ее центр лежит на нормали в направлении $\ddot{\gamma}(s_0)$,

(2) ее радиус равен $|\ddot{\gamma}(s_0)|^{-1}$.

Доказательство.

Натуральная параметризация окружности

$$r(s) = \left(x_0 + R \cdot \cos\frac{s}{R}, y_0 + R \cdot \sin\frac{s}{R}\right).$$

Тогда

$$\ddot{r}(s) = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right), \quad |\ddot{r}| = R^{-1}.$$

По лемме о перпендикулярности $\dot{r}(s) \perp \ddot{r}(s)$.

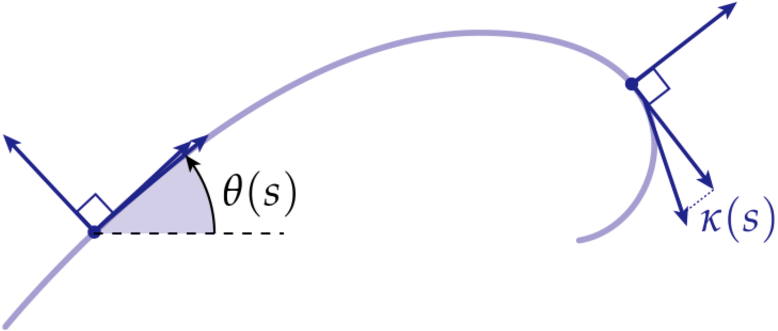
Касание 2-го порядка $\Leftrightarrow$ (1) и (2). $\square$

Кривизна

Кривизна — $k(s) := \|\ddot{\gamma}(s)\|$

Радиус кривизны — $R(s) = 1/k(s)$

Эквивалентно: $k(s) = \frac{d}{ds}\theta(s)$!



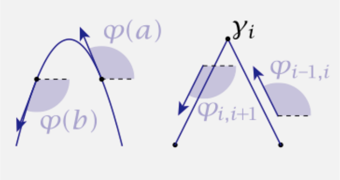
Дискретизация

Что такое хорошая дискретизация?

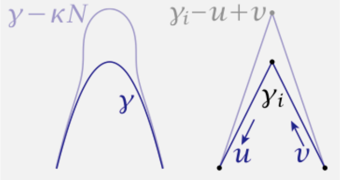
- Удовлетворяет известным гладким соотношениям (глобальным: интегрирование, теорема Стокса, и т.д.)
- Сходимость при приближении дискретного к гладкому
- Легко вычисляется!

Дискретная кривизна

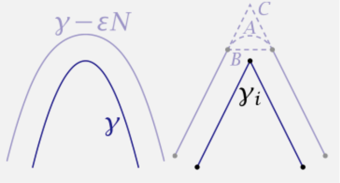
Угол вращения



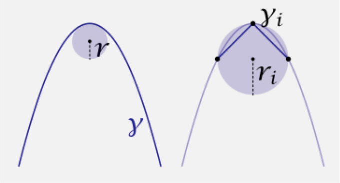
Вариация длин



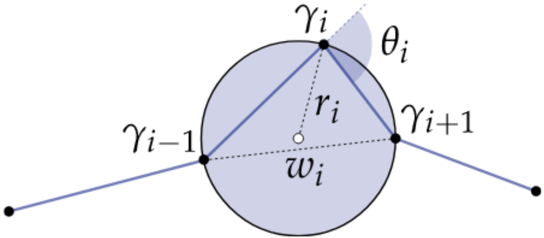
Формула Штейнера



Соприкасающаяся окружность



Соприкасающаяся окружность

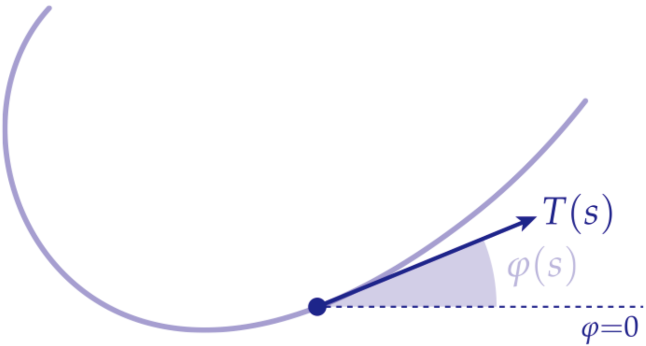


$$w_i := |\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}|$$

Можно вычислить радиус и кривизну:

$$k_i = \frac{1}{r_i} = 2\sin(\theta_i)/w_i.$$

Угол вращения



$$\boxed{\kappa(s) = \frac{d}{ds}\varphi(s)}$$

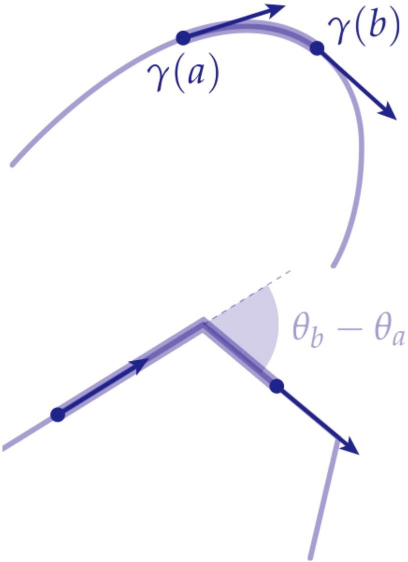
Дискретная кривизна: угол вращения

Как вычислить кривизну дискретной кривой?

Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b k(s)ds = \int_a^b \left(\frac{d}{ds}\varphi(s)\right) ds =$$
$$= \varphi(b) - \varphi(a)$$

Voilà !

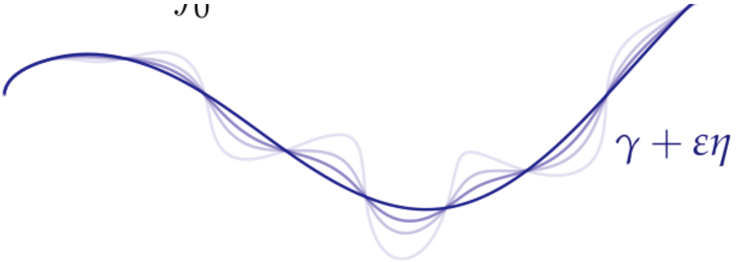


Дискретная кривизна: вариация длин

Упражнение:

Пусть $\gamma, \eta \colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = \eta(0)$, $\gamma(L) = \eta(L)$, тогда

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} L(\gamma + \varepsilon\eta) = -\int_0^L \langle \eta(s), k(s)N(s)\rangle ds.$$

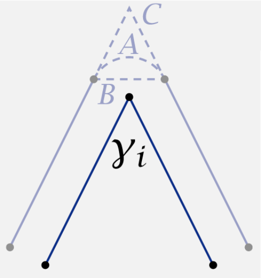


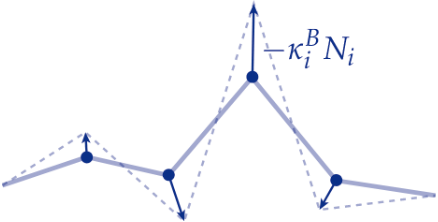
Упражнение:

Пусть $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$, тогда

$$L(\gamma + \varepsilon N) = L(\gamma) - \varepsilon \int_0^L k(s) ds.$$

Дискретная кривизна: вариация длин и формула Штейнера





$$L_A = L(\gamma) - \varepsilon \sum_i \theta_i, \qquad \kappa_i^A = \theta_i;$$

$$L_B = L(\gamma) - 2\varepsilon \sum_i \sin(\theta_i/2), \qquad \kappa_i^B = 2\sin(\theta_i/2);$$

$$L_C = L(\gamma) - 2\varepsilon \sum_i \tan(\theta_i/2), \qquad \kappa_i^C = 2\tan(\theta_i/2);$$

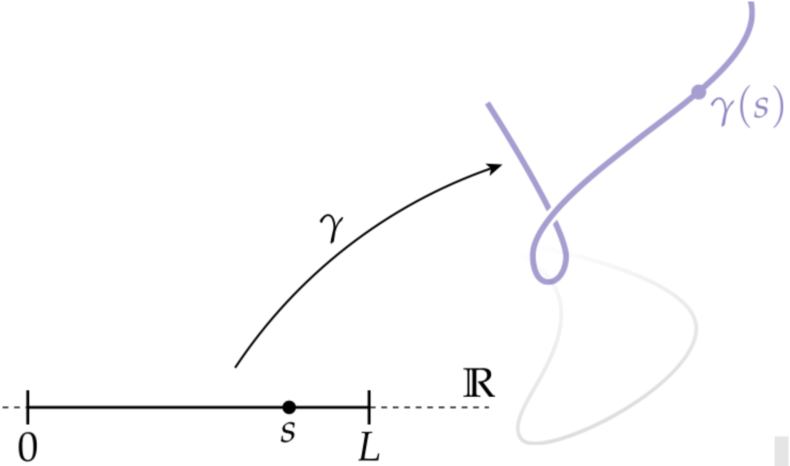
Дискретная кривизна: что в итоге выбрать?

- Какие задачи мы решаем?
- Какие свойства мы хотим?
- Какие соотношение должны выполняться?
- Вычислительная сложность?
- Нет однозначного ответа!
- Ни одна дискретизация не может удовлетворять всем свойствам сразу!

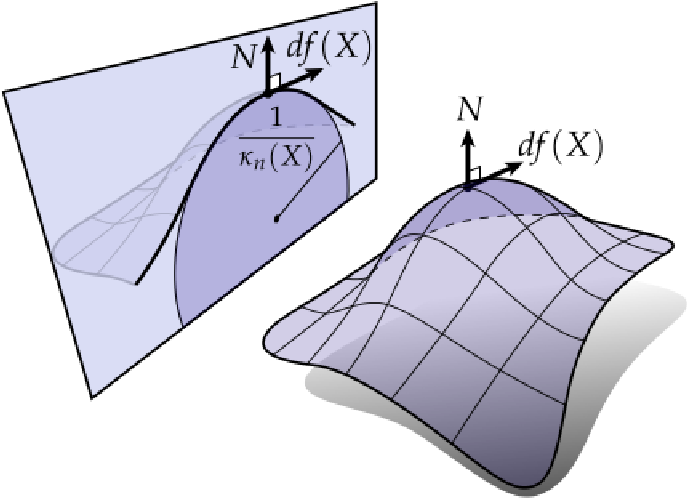
Геометрия пространственных кривых

Пространственные кривые

Гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$ — гладкое отображение $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$



Соприкасающаяся окружность и кривизна



Репер Френе — ортонормированная тройка $\{T(s), N(s), B(s)\}$, где

$T(s) = \dot{\gamma}(s)$ — единичный (касательный) вектор **скорости**,

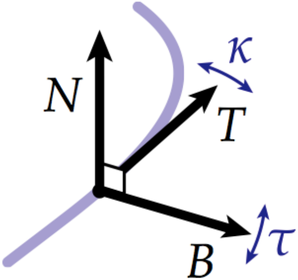
$N(s) = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)}$ — вектор **главной нормали**,

$B(s) = [T(s) \times N(s)]$ — вектор **бинормали** к кривой.

Формулы Френе

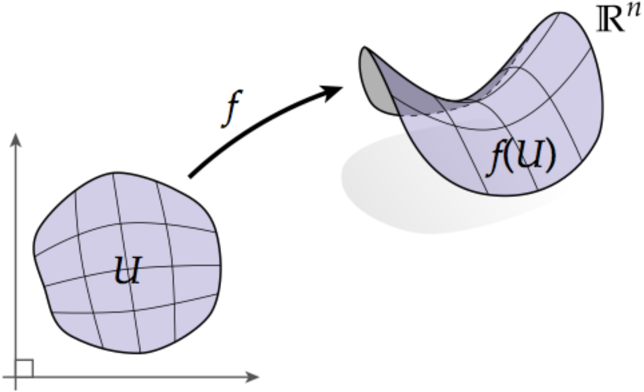
$$\begin{bmatrix} \dot{T}(s) \\ \dot{N}(s) \\ \dot{B}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Здесь $\tau(s)$ — **кручение**.



Геометрия поверхностей

Гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$

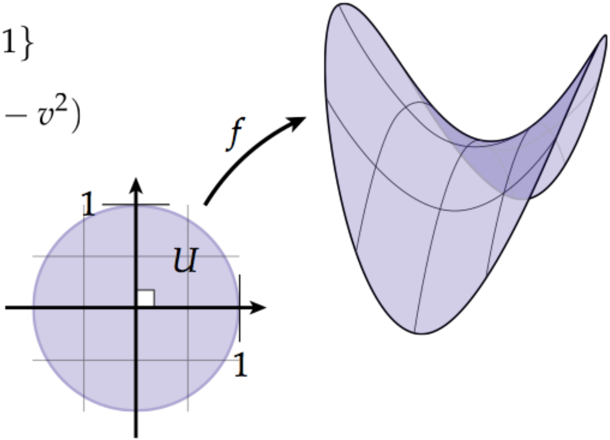


Пример

Седло в $\mathbb{R}^3$

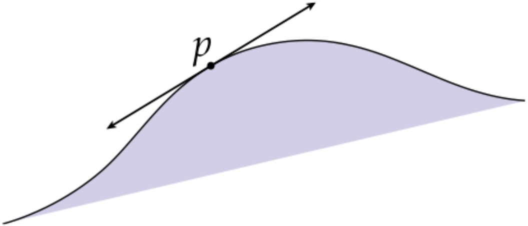
$$U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

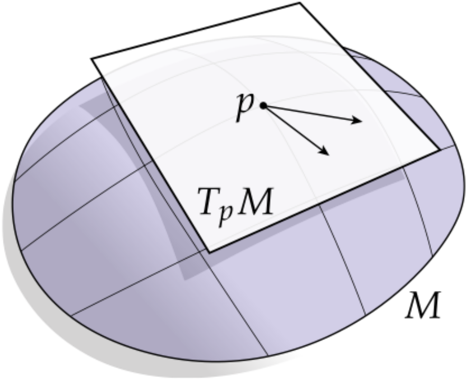
$$f : U \to \mathbb{R}^3;\ (u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$$



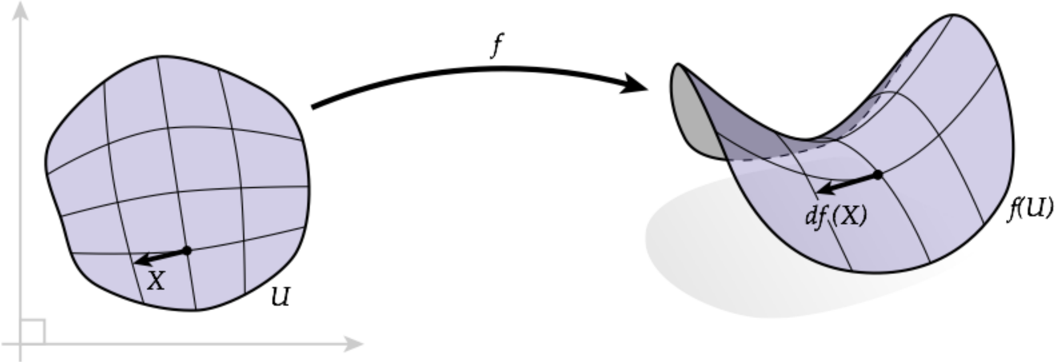
Касательное пространство

Касательное пространство к поверхности — множество всех касательных векторов.



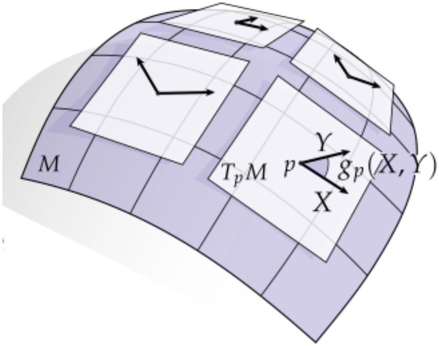


Дифференциал отображения — это линейное отображение на касательных векторах



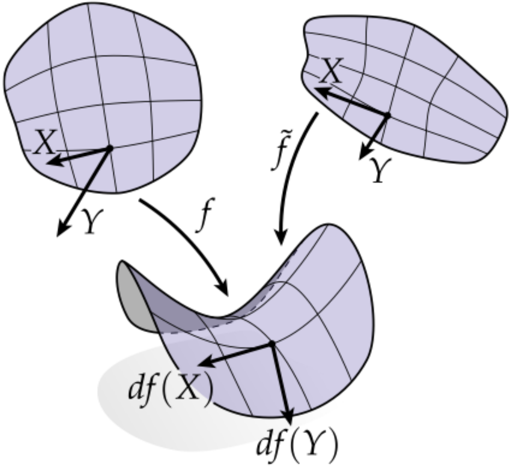
Риманова метрика

- Большинство вычислений на многообразиях сводятся к метрическим.
- Это позволяет сделать так называемая **риманова метрика**
- **Абстрактно:** положительно определённая билинейная форма, гладко зависящая от точки.



Евклидова риманова метрика, индуцированная вложением

- Обычно поверхность задана вложением $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Как вычислить $g(X, Y)$?
- Нельзя использовать $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на T_pM. Почему?
- **Индуцированная метрика:** $g(X, Y) := \langle df(X), df(Y) \rangle$



Список литературы:

[1] Keenan Crane — Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction, 2018.

[2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекция 1, стр. 5 – 14

[3] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет. *Лекция 1, стр. 3 – 10*