Поверхности и кривизны.

1. Пусть $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ регулярное отобр., то есть $\operatorname{rank} J_x(f) = n$. (во всех точках)

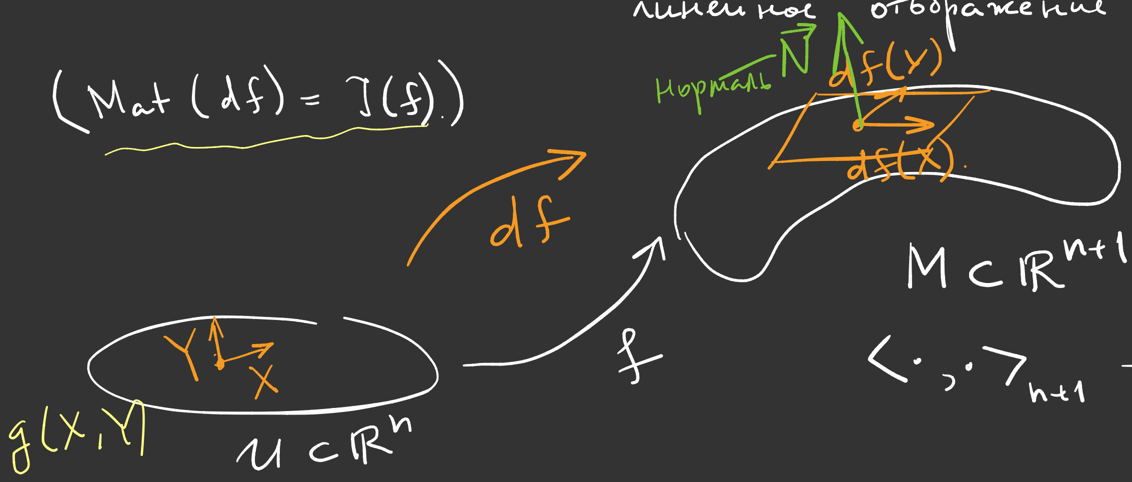
$\iff e_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ \dots, \ e_n = \frac{\partial f}{\partial u_n}$ — лин/нез. векторы.

$\boxed{T_x M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle}$

Тогда $f(U) = M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — поверхность.

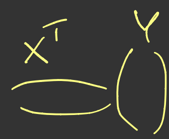
Здесь $df: TU \to TM$ — дифференциал отобр f, т.е. линейное отображение касат. пр-в.

$(\mathrm{Mat}(df) = J(f))$



$\langle \cdot, \cdot \rangle_{n+1}$ — евкл. скал. умн-е в $\mathbb{R}^{n+1}$

2. Риманова метрика $\simeq$ I квадр. форма.



Опр. $g(X, Y) := \langle df(X), df(Y) \rangle$

Посмотрим на это в базисе $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = T_x M$

Тогда $g(X,Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle = X^T \cdot G \cdot Y$, где

$G = J_f^T \cdot J_f$. Т.е. матр. I кв. формы $G = G(e_1, \dots, e_n) =$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

3. Shape operator = оператор формы.

$S: T_x U \to T_x U$, т.что $df(SX) = dN(X)$, где $N: U \to S^n$

$p \mapsto N_p$

$dN: TU \to TS^n$

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^{*}x, y\rangle$$

Предл.1. Линейный оператор S — самосопряжённый, т.е.

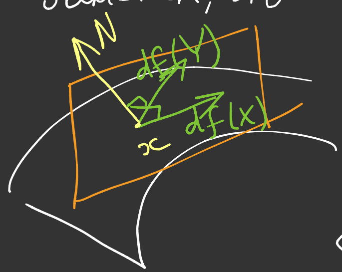
$$g(SX, Y) = g(X, SY).$$

Пруф: $N: M \to S^2$, т.е. $dN_x : T_x M \to T_{N(x)} S^2$

$$g(SX, Y) = \langle df(SX), df(Y)\rangle = \langle dN(X), df(Y)\rangle \text{ и}$$

$$g(X, SY) = \ldots = \langle df(X), dN(Y)\rangle$$

Заметим, что $\underbrace{\langle df(X), N\rangle}_{\text{вдоль } Y} = \underbrace{\langle df(Y), N\rangle}_{\text{вдоль } X} = 0$ $\quad (d(A\cdot B) = dA\cdot B + A\cdot dB)$



Продифференцируем и получаем, что

$$\langle df(X), dN(Y)\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}, N\right\rangle = 0$$

$$\Leftarrow$$

$$\langle df(Y), dN(X)\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial X}, N\right\rangle = 0 \quad \blacksquare$$

④ II квадр. форма.

Опр. $\mathrm{II}(X,Y) = -g(SX,Y) \overset{\text{Пр.1}}{=} -g(X,SY) = -\langle df(X), dN(Y)\rangle$
$= -\langle df(Y), dN(X)\rangle$.

Предл.2. $$\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) = \begin{pmatrix} \langle N, f_{u_1u_1}\rangle & \cdots & \langle N, f_{u_1u_n}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle N, f_{u_nu_1}\rangle & \cdots & \langle N, f_{u_nu_n}\rangle \end{pmatrix},$$

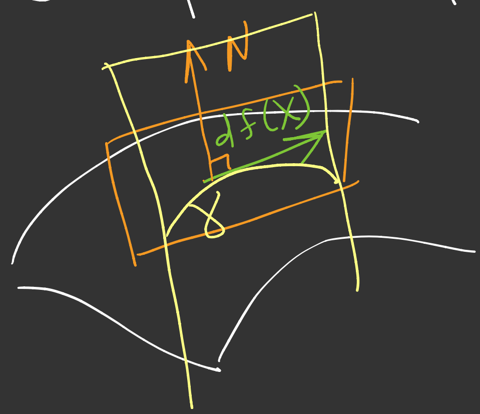
где $f_{u_iu_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$

Пруф. Следует из док-ва Пр.1, а именно,

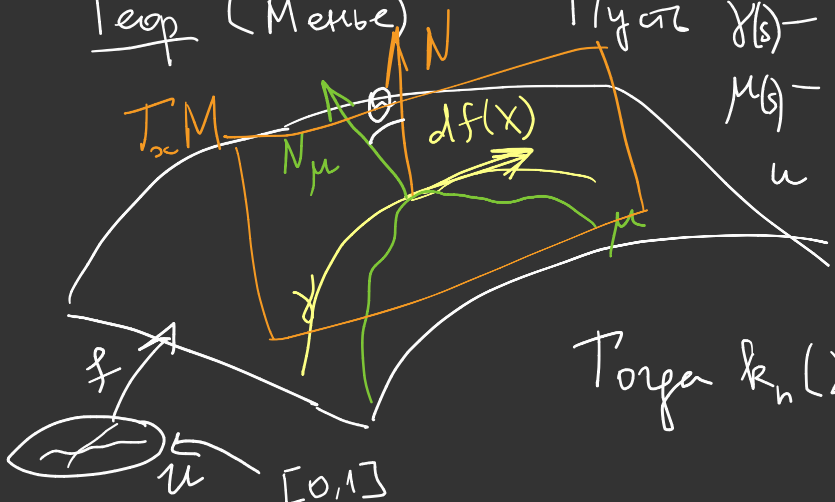
$$\mathrm{II}(X,Y) = -\langle df(X), dN(Y)\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}, N\right\rangle. \quad \blacksquare$$

$$X\,\mathrm{Mat}(\mathrm{II})(Y)$$

(5) Нормальная кривизна $k_n(x) = \underset{\text{сечения}}{\overset{\text{кривизна}}{\text{нормального}}} = \tilde{k}(\gamma) = \pm k(\gamma)$



Теор (Менье)



Пусть $\gamma(s)$ — норм. сечение M вдоль $df(X)$

$\mu(s)$ — какая-то кривая, т.ч. $\dot{\mu} = df(X)$ $\Downarrow$ $|df(X)| \equiv 1$

и $\angle(N, N_\mu) = \theta$.

Тогда $k_n(X) = \hat{k}(\mu)\cdot\cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}(X,X)}{1 = g(X,X)}$.

Док-во: $\mu = f(u(s))$, $\gamma = f(v(s))$.

Тогда $$\ddot{\mu}(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\cdot \dot{u}_i \cdot \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n} \overset{\frac{\partial f}{\partial u_k}}{e_k} \cdot \ddot{u}_k$$

$$\ddot{\gamma}(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_j}\cdot \dot{v}_i \dot{v}_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot \ddot{v}_k$$

Заметим, что $\langle e_k, N\rangle = 0$. Тогда

$$\langle \ddot{\mu}, N\rangle = \langle k(\mu)\cdot N_\mu, N\rangle = k(\mu)\cdot\cos\theta =$$

$$= \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle \dot{u}_i \dot{u}_j = \mathrm{II}(X,X)$$

Итак, $\langle \ddot{\gamma}, N\rangle \underset{\text{аналогично}}{=} k_n(X) = \mathrm{II}(X,X) = k(\mu)\cdot\cos\theta$ ∎

Следствие $k_n(X) = \dfrac{\langle df(X), dN(X)\rangle}{\langle df(X), df(X)\rangle}$

⑥ Главные кривизны и направления.

Опр $S(X_j) = k_j X_j$

В базисе главных направлений

$$\mathrm{Mat}(g) = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) = \mathrm{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

$K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = \det(\mathrm{II} \cdot G^{-1})$, $H = k_1 + \ldots + k_n = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) \cdot G^{-1})$ $(/n)$

Теор Пусть S – 2-мер. пов-ть (односвязная)

Если $K(S) \equiv 1$, то $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$K(S) \equiv 0$, то $S = E^2 = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

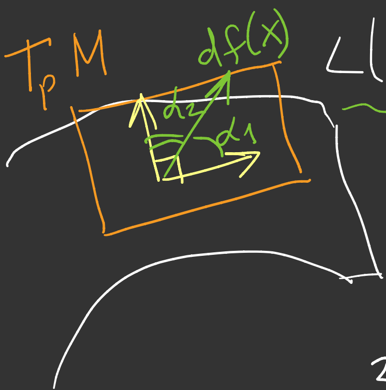
$K(S) \equiv -1$, то $S = H^2$ (плоскость Лобачевского) $\not\subset \mathbb{R}^3$

Нельзя вложить

Теор Пусть $f(U) = M$, $k_1, \dots, k_n$ – главные кривизны.

Тогда $\max\limits_{\|df(x)\|=1} k_n(X)$, $\min\limits_{\| \ \|=1} k_n(X) \in \{k_1, \dots, k_n\}$.

Док-во: Пусть $e'_k = df(X_k)$, и пусть



$\angle(df(x), e'_k) = \alpha_k \Rightarrow df(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\alpha_k \cdot e'_k$

Тогда $k_n(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \cdot \cos^2\alpha_j$

Заметим, что $1 = g(X,X) = \sum\limits_{j=1}^{n} \cos^2\alpha_j$

Пусть $k_1 \geq k_j$, тогда $\left(\cos^2\alpha_1 = 1 - \sum\limits_{j=2}^{n} \cos^2\alpha_j\right)$

$k_n(X) = k_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} (k_1 - k_j)\cos^2\alpha_j \leq k_1$. ∎