# Геометрия в компьютерных приложениях

## Лекция 6: Дискретные дифференциальные формы

Богачев Николай Владимирович

26 ноября 2020

Skoltech & MIPT

# Дискретные внешние формы

# Дискретизация/интерполяция: основная идея

Дискретизация $\longleftrightarrow$ интерполяция:

- дискретизация: через интегрирование $k$-формы по симплексам
- интерполяция: через линейные комбинации гладких на $k$-симплексах

# Симплициальная поверхность

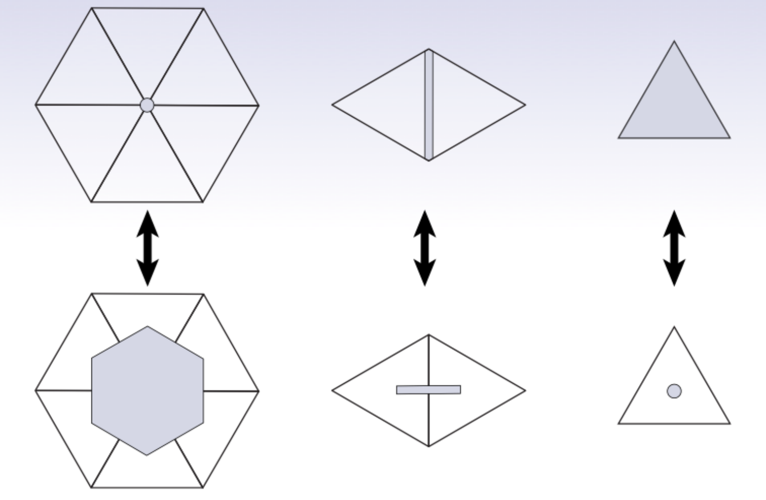
Пусть $M = \{V, E, F\}$ — симплициальная поверхность рода $g$.

- Напомним, что $V - E + F = 2 - 2g$.
- Вершины сетки — $u, v, t, \ldots \in V$.
- Ориентированные ребра — пары вершин $(u, v) \in E$.
- Ориентированные грани — тройки вершин $(u, v, t) \in F$.

*Двойственная сетка* $M^* = \{V^*, E^*, F^*\}$.

- Вершина $f^* \in V^*$ — центр (описанной окружности) грани $f$.
- Ребро $e^* \in E^*$ соединяет центры граней исходной сетки, смежных по ребру $e \in E$.
- Грань $v^* \in F^*$ — многоугольник, вершины которого суть центры граней, содержащих $v$.

*Двойственная сетка* $M^* = \{V^*, E^*, F^*\}$.



# Дискретизация 0-форм

- 0-формы — это функции на многообразии.
- Дискретизация функции — это ее значения в вершинах сетки.
- Таким образом, 0-формы на сетке $M$ — это функции $h\colon V \to \mathbb{R}$.

Дискретные 1-формы — это такие функции $\omega^1 \colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\omega^1(u, v) = -\omega^1(v, u)$$

для всех $(u, v) \in E$.

Дискретные 2-формы — это такие функции $\omega^2\colon F \to \mathbb{R}$, что

$$\omega^2(u, v, t) = (-1)^\sigma \omega^2(\sigma(u), \sigma(v), \sigma(t))$$

для всех $(u, v, t) \in F$.

Имеются всего два дифференциала на сетке, это

- $d_0\colon \Lambda^0(M) \to \Lambda^1(M)$, где для каждого $f \in \Lambda^0(M)$ и $(u, v) \in E$ имеет место $(d_0 f)(u, v) = f(v) - f(u)$.
- $d_1\colon \Lambda^1(M) \to \Lambda^2(M)$, где для каждого $\omega \in \Lambda^1(M)$ и $(u, v, t) \in F$ имеет место $(d_1\omega)(u, v, t) = \omega(u, v) + \omega(v, t) + \omega(t, u)$.

# Дискретное внешнее умножение

В дискретном случае имеется $\wedge_{0,0}$, $\wedge_{1,0}$, $\wedge_{2,0}$, $\wedge_{1,1}$.

$\wedge_{0,0} : \Lambda^0(M) \times \Lambda^0(M) \to \Lambda^0(M)$ — поточечное произведение, то есть $(f \wedge_{0,0} g)(v) = f(v)g(v)$.

Для всех $\omega \in \Lambda^1(M)$, $f \in \Lambda^0(M)$ и $(u, v) \in E$ мы определяем их внешнее произведение по правилу

$$(\omega \wedge_{1,0} f)(u, v) := \omega(u, v) \cdot \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

Для всех $\omega \in \Lambda^2(M)$, $f \in \Lambda^0(M)$ и $(u, v, t) \in F$ мы определяем

$$(\omega \wedge_{2,0} f)(u, v, t) := \omega(u, v, t) \cdot \frac{f(u) + f(v) + f(t)}{3}$$

Наконец, для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(M)$ и $(u, v, t) \in F$ мы определяем

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge_{1,1} \omega_2)(u, v) := \frac{1}{6}\big[&(\omega_1(u, v)\omega_2(v, t) - \omega_1(v, t)\omega_2(u, v)) + \\ &(\omega_1(v, t)\omega_2(t, u) - \omega_1(t, u)\omega_2(v, t)) + \\ &(\omega_1(t, u)\omega_2(u, v) - \omega_1(u, v)\omega_2(t, u))\big]\end{aligned}$$

# Дискретная звезда Ходжа

Итак, $\star_0 \colon \Lambda^0(M) \to \Lambda^{*2}(M)$, где $(\omega_0 \colon V \to \mathbb{R}) \mapsto (\star_0\omega_0 \colon F^* \to \mathbb{R})$,

$$(\star_0\omega_0)(v^*) := \mathrm{Area}(v^*) \cdot \omega_0(v).$$

Далее, $\star_1 \colon \Lambda^1(M) \to \Lambda^{*1}(M)$, где $(\omega_1 \colon E \to \mathbb{R}) \mapsto (\star_1\omega_1 \colon E^* \to \mathbb{R})$,

$$(\star_1\omega_1)(e^*) := \frac{|\mathrm{Len}\,(e^*)|}{|\mathrm{Len}\,(e)|} \cdot \omega_1(e).$$

$\star_2 \colon \Lambda^2(M) \to \Lambda^{*0}(M)$, где $(\omega_2 \colon F \to \mathbb{R}) \mapsto (\star_2\omega_2 \colon V^* \to \mathbb{R})$,

$$(\star_2\omega_2)(f^*) := \frac{1}{\mathrm{Area}(f)} \cdot \omega_2(f).$$