Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 5: Внешние и дифференциальные формы

Богачев Николай Владимирович

21 октября 2020

Skoltech & MIPT

Внешние формы

Пусть V – конечномерное вещественное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

- **Линейная функция** на V: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ для всех $u, v \in V$.
- **Двойственное (или сопряженное)** пространство V^* — пространство линейных функций (функционалов) на V.
- Какова его размерность?

- **Двойственный базис** пространства V^* (или двойственный к $\{e_1, \ldots, e_n\}$) — это набор функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$, где $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.
- Почему это действительно базис?
- Таким образом, $\dim V^* = \dim V = n$.

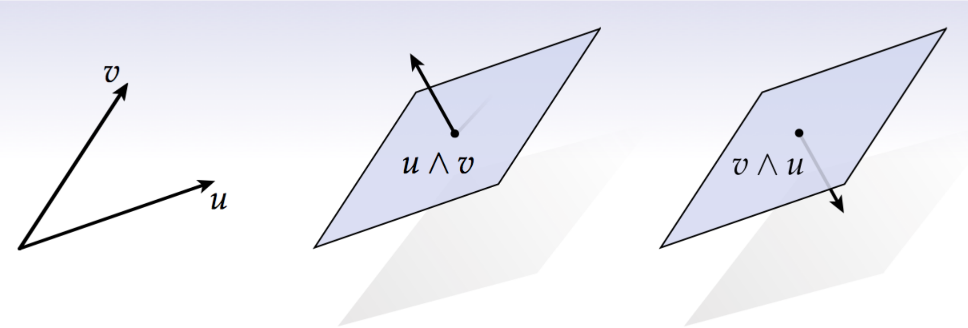
Внешнее умножение 1-форм:

$$\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 \,(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1^1(v_1) & \ldots & \omega_1^1(v_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_k^1(v_1) & \ldots & \omega_k^1(v_k) \end{pmatrix}$$

— k-форма, называемая **мономом**.

Внешнее умножение

Рис. 1: $u \wedge v = -v \wedge u$



Внешние формы

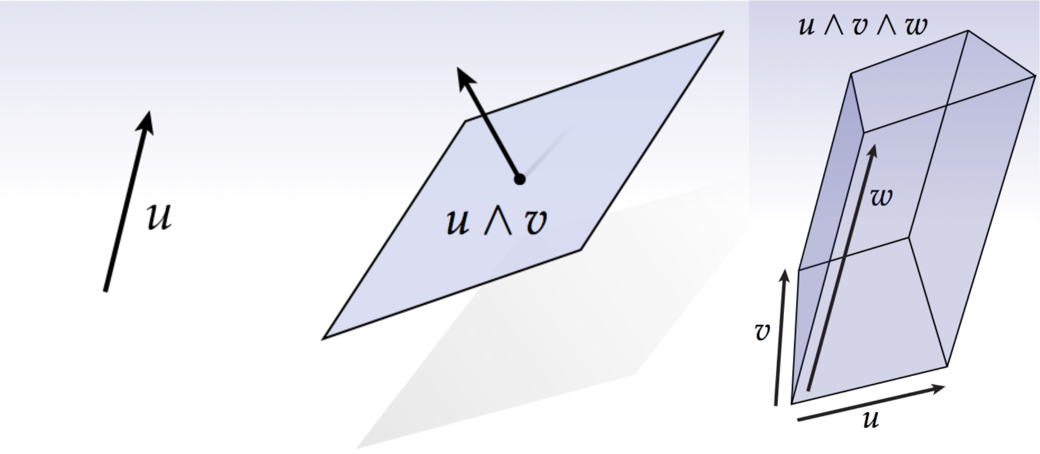
Внешняя k-форма – кососимметрическая полилинейная функция от k аргументов:

$$\omega^k(v_1, \ldots, v_k) = (-1)^\sigma \omega^k(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)});$$

$$\omega^k(\alpha u + \beta v, v_2 \ldots, v_k) = \alpha\omega^k(u, v_2, \ldots, v_k) + \beta\omega^k(v, v_2, \ldots, v_k).$$

k-формы или k-векторы

Рис. 2: k-формы для $k = 1, 2, 3$.



Пространство внешних форм $\Lambda^k(V)$

Пространство внешних форм $\Lambda^k(V)$

- **Пространство k-форм** обозначим через $\Lambda^k(V)$.
- Ясно, что $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(V) = V^*$.
- Можно заметить, что $\Lambda^2(V) \simeq T_E \, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ — пространство кососимметрических матриц $n \times n$.

Пример

Определитель $\det(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_k)$.

Базис пространства $\Lambda^2(V)$

Теорема. $\Lambda^2(V) = \langle f_i \wedge f_j \mid i < j \rangle$, т. е. $\dim \Lambda^2(V) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Доказательство. Пусть $u = \sum_i u_i e_i$, $v = \sum_j v_j e_j$, тогда

$$\omega^2(u, v) = \sum_{i \neq j} u_i v_j \omega^2(e_i, e_j) = \sum_{i \neq j} u_i v_j \omega_{ij}(f_i \wedge f_j)(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i<j} \omega_{ij}(f_i \wedge f_j) \left(\sum_k u_k e_k, \sum_m v_m e_m \right) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(f_i \wedge f_j)(u, v),$$

то есть всякая 2-форма $\omega^2 \in \langle f_i \wedge f_j \mid i < j \rangle$.

Остается проверить линейную независимость. Для этого достаточно применить $\sum_{i<j} \lambda_{ij} f_i \wedge f_j$ к паре (e_i, e_j). ■

Существование симплектического базиса для 2-формы

Теорема

Для всякой 2-формы ω^2 существует **симплектический базис** $e'_1, \ldots, e'_n$, в котором $\omega^2 = f'_1 \wedge f'_2 + f'_3 \wedge f'_4 + \ldots + f'_{2k-1} \wedge f'_{2k}$.

Доказательство.

- Всякая 2-форма задается кососимметрической матрицей.
- Индукция по $n = \dim V$. При $n = 0, 1$ доказывать нечего.
- При $n \geq 2$ существуют такие два вектора e'_1, e'_2, что матрица ω^2 при ограничении на $U = \langle e'_1, e'_2 \rangle$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Тогда $V = U \oplus U^\perp$, и для $U^\perp$ выполнено предположение индукции.

$\square$

Базис пространства $\Lambda^k(V)$

Теорема

$\Lambda^k(V) = \langle f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} \mid j_1 < \ldots < j_k \rangle$, то есть $\dim \Lambda^k(V) = C_n^k$.

Доказательство.

Аналогично теореме про базис пространства $\Lambda^2(V)$. $\square$

Общее внешнее умножение

Определим **внешнее умножение двух произвольных** форм ω_1^k и ω_2^m:

$$\omega_1^k \bar{\wedge}_{k,m} \omega_2^m(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+m} \\ \sigma(1) < \ldots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+m)}} (-1)^\sigma \cdot \omega_1^k(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot \omega_2^m(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)})$$

Свойства

- Кососкоммутативность: $\omega_1^k \bar{\wedge} \omega_2^m = (-1)^{km} \omega_2^m \bar{\wedge} \omega_1^k$
- Дистрибутивность: $(a_1\omega_1^k + a_2\omega_2^k) \bar{\wedge} \omega_3^m = a_1\omega_1^k \bar{\wedge} \omega_3^m + a_2\omega_2^k \bar{\wedge} \omega_3^m$
- Ассоциативность: $(\omega_1^k \bar{\wedge} \omega_2^l) \bar{\wedge} \omega_3^m = \omega_1^k \bar{\wedge} (\omega_2^l \bar{\wedge} \omega_3^m)$.
- На мономах $\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 = \omega_1^1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} \omega_k^1$.

Доказательство.

Самая сложная часть – совпадение разных умножений на мономах.

Для этого достаточно доказать, что

$$(\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1) \bar{\wedge} (\omega_{k+1}^1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k+m}^1) = \omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 \wedge \omega_{k+1}^1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k+m}^1. \quad (1)$$

Правая часть равна $\det(\omega_i^1(v_j))_{k+l}$, а левая часть равна сумме произведений минoров $\sum_\sigma (-1)^\sigma \det(\omega_i^1(v_j))_k \det(\omega_i^1(v_j))_l$. Ясно, что они совпадают. $\square$

Поведение при отображениях

Пусть $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Тогда на $\mathbb{R}^m$ можно построить k-форму $A^*\omega^k$, определив ее следующим образом:

$$(A^*\omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \omega^k(A(v_1), \dots, A(v_k)).$$

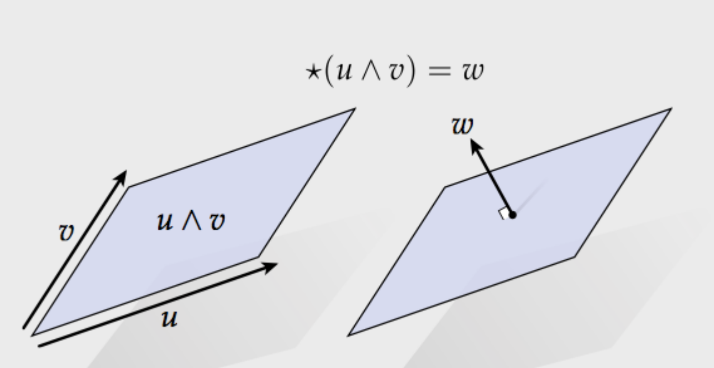
Предложение

Операция $A \mapsto A^*$ удовлетворяет следующим условиям:

- $A^*\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – действительно k-форма.
- $A^*\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ – линейный оператор ("обратный").
- $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.
- $A^*(\omega_1^k \wedge \omega_2^m) = (A^*\omega_1^k) \wedge (A^*\omega_2^m)$.

Звезда Ходжа $\star\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ — это изоморфизм линейных пространств, заданный формулой

$$\star(f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}) = \operatorname{sgn} \sigma_{j_1,\ldots,j_n} \cdot f_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge f_{j_n}.$$



Дифференциальные формы на многообразиях

Простейший пример

Дифференциал функции (например, $f(x) = x^2$).

Имеем $d_x f = 2x \cdot dx$, где dx — дифференциал координатной функции, который действует так: $dx(v) = v$.

Видно, что $d_x f$ — функция, линейная по векторам и гладко зависящая от точки x.

Дифференциальная 1-форма на многообразии — пример

Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на многообразии M.

Тогда $d_P f$ есть 1-форма на $T_P M$.

Тогда $df : T(M) \to \mathbb{R}$ — есть гладкое отображение, линейное на каждом $T_P M$.

Дифференциальная 1-форма

$\mathrm{T}_p(M)$ имеет базис $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, а двойственное ему *кокасательное* пространство $\mathrm{T}_p^*(M)$ имеет двойственный базис $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

Дифференциальная 1-форма на M — гладкое отображение $\omega^1 \colon T(M) \to \mathbb{R}$, линейное на каждом $T_P M$.

$$\omega^1 = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n.$$

Дифференциальная k-форма

Дифференциальная k-форма

$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1\ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

— это набор k-форм в касательных пространствах к M, гладко зависящий от точки: $\omega_{j_1\ldots j_k}(x)$ — гладкие функции.

Внешний дифференциал

Внешний дифференциал $d\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+1}(V)$ переводит k-форму ω в $(k+1)$-форму

$$d\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} d\omega_{j_1\ldots j_k}(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

.

(a) Докажите, что если $k = 0$, то $d\phi(X) = D_X\phi$.

(b) Докажите, что $d^2\omega = d \circ d(\omega) = 0$.

(c) Докажите, что $d(\omega_1^k \wedge \omega_2^m) = d\omega_1^k \wedge \omega_2^m + (-1)^k \omega_1^k \wedge d\omega_2^m$.

Кодифференциал

Кодифференциал δ переводит $\omega \in \Lambda^k(M)$ в $\delta\omega := \star(d(\star\omega))$.

(a) Докажите, что если $k = 0$, то $\delta\omega = 0$.

(b) Докажите, что если $\omega \in \Lambda^k(M)$, то $\delta\omega \in \Lambda^{k-1}(M)$

Лапласиан

Лапласиан на функциях:

$$\Delta := \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Обобщённый Лапласиан на k-формах задаётся по формуле

$$\Delta := \delta d + d\delta = \star d \star d + d \star d \star .$$

Разбиение единицы

Пусть (X, τ) — топологическое пространство.

Разбиением единицы называется такое семейство функций $h_j \colon A_j \to \mathbb{R}$ на локально конечном открытом покрытии X множествами A_j, что

$$\sum_j h_j(x) = 1$$

для всех $x \in X$.

Интеграл от n-формы по карте

Пусть (U, φ) — карта на n-мерном многообразии M. В ней $\omega^n = \omega(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Тогда

$$\int_U \omega^n := \int_{\varphi(U)} \omega(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Интеграл от n-формы с компактным носителем

Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — локально конечный атлас на n-мерном многообразии M. Тогда существует разбиение единицы $\{h_\alpha\}$, подчиненное этому атласу, и

$$\int_M \omega^n := \sum_{k=1}^{N} \int_{U_k} h_k \omega^n.$$

Теорема Стокса

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие с краем ∂M. Пусть $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$