

# ГЕОМЕТРИЯ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Лекция 4: Дискретные поверхности

---

Богачев Николай Владимирович

30 сентября 2020

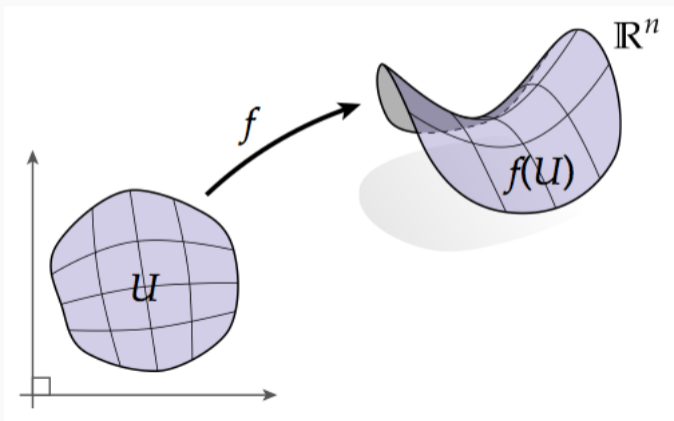
Skoltech & MIPT

## Вторая квадратичная форма

---

# Поверхности

Гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^n$  — гладкое отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — тоже многообразие!!



# I квадратичная форма

Пусть  $M = f(U)$ ,  $p \in M$ . Тогда на  $T_p M$  есть  $(\cdot, \cdot)$ .

Матрица I квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

Тогда

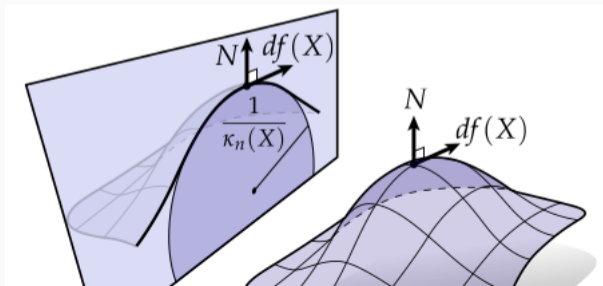
$$g(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle = X^T G Y := I(X, Y).$$

Здесь  $G = J_f^T \cdot J_f$ , где  $J_f$  — матрица Якоби отображения  $f$ .

# Нормальная кривизна

По определению: кривизна (со знаком! в зависимости от сонаправленности векторов нормалей поверхности и кривой) нормального сечения поверхности плоскостью!

$$k_n(X) = \frac{\langle df(X), dN(X) \rangle}{\langle df(X), df(X) \rangle}$$



# Оператор формы (Shape Operator)

$$S: T_pM \rightarrow T_pM, \quad df(SX) = dN(X) \quad (df \circ S = dN)$$

Главные направления — собственные векторы  $S$ !

Главные кривизны — собственные значения  $S$ !

$S$  — самосопряженный оператор.

## II квадратичная форма

$$\mathbb{I}(X, Y) := -g(SX, Y) = -\langle df(SX), df(Y) \rangle = -\langle dN(X), df(Y) \rangle.$$

Заметим, что

$$\mathbb{I} = I \cdot S.$$

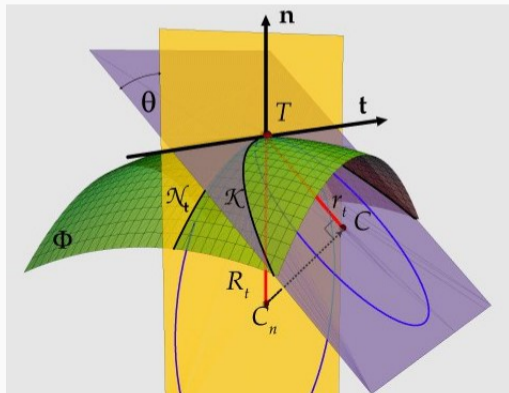
Матрица II квадратичной формы:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \langle N, f_{uu} \rangle & \langle N, f_{uv} \rangle \\ \langle N, f_{uv} \rangle & \langle N, f_{vv} \rangle \end{pmatrix}.$$

# Теорема Менье

$t$  — вектор скорости к  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{N}_t$  — нормальное сечение плоскостью  $\langle n, t \rangle$ ,  
 $n(\mathcal{K})$  — вектор гл. нормали к  $\mathcal{K}$ ,  $\theta = \angle(n, n(\mathcal{K}))$ . Тогда

$$k(\mathcal{N}_t) = k(\mathcal{K}) \cos \theta = \frac{\mathbb{I}(t, t)}{l(t, t)}.$$



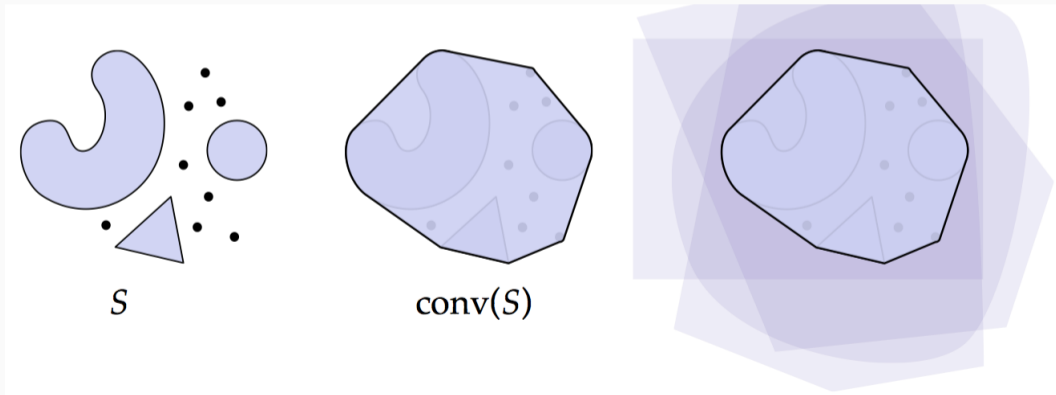


# Дискретные поверхности

---

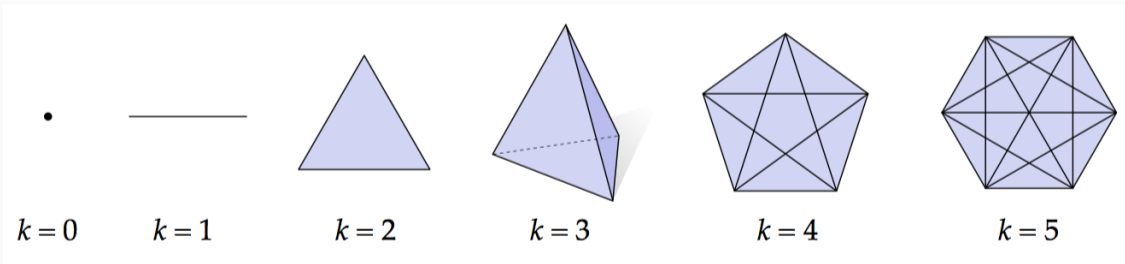
# Выпуклая оболочка

Для множества  $S \subset \mathbb{R}^n$  его выпуклая оболочка  $\text{conv}(S)$  — наименьшее выпуклое множество, содержащее  $S$ .



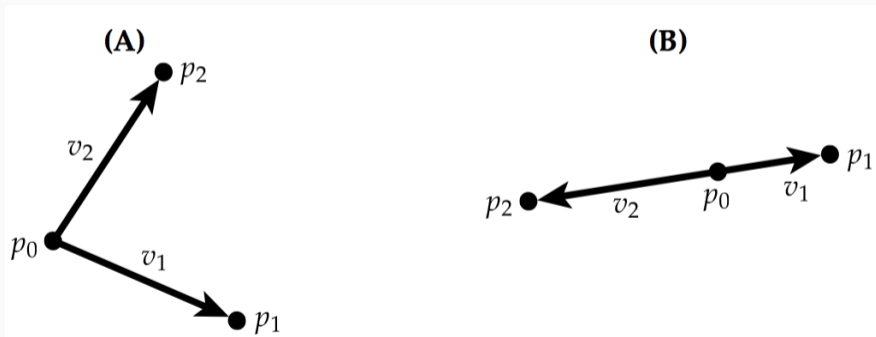
# Симплексы

Точка, отрезок, треугольник, тетраэдр и т.д.



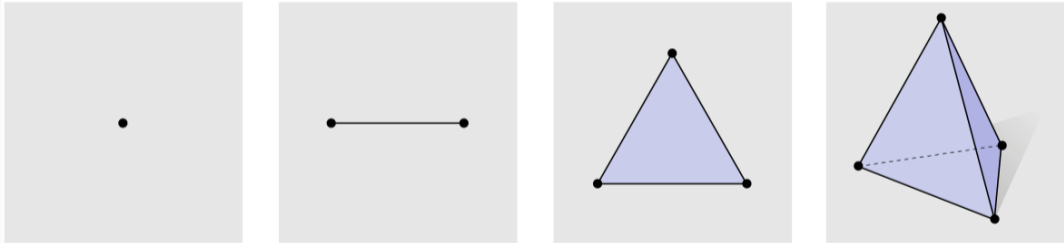
# Аффинная независимость

Точки  $p_0, \dots, p_n$  аффинно независимы, если векторы  $v_k = p_k - p_0$  линейно независимы.



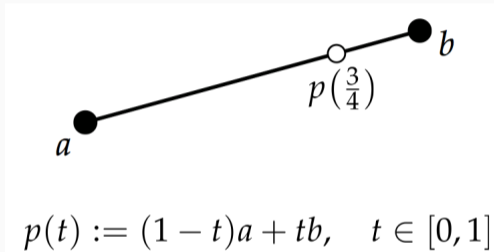
# Симплексы: формальное определение

$k$ -симплекс — выпуклая оболочка  $(k + 1)$  аффинно независимой точки.



# Барицентрические координаты

Как задать 1-симплекс?

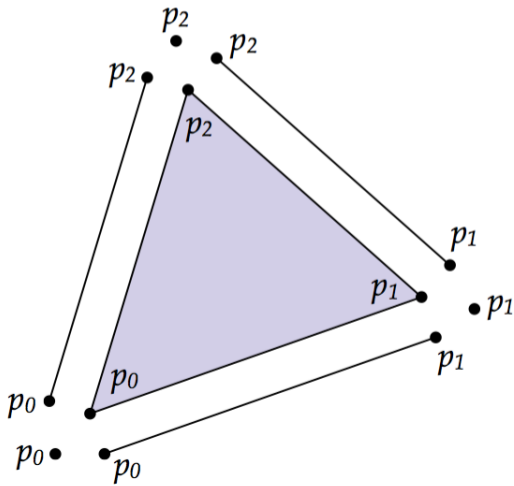


Аналогично для  $k$ -симплекса:

$$\sigma_k = \left\{ \sum_{k=0}^n t_k p_k \mid \sum_{k=0}^n t_k = 1, t_k \geq 0 \forall k \right\}.$$

# Грани симплекса

Грани симплекса — симплексы меньшей размерности.



# Симплициальный комплекс

Геометрический симплициальный комплекс — это такое семейство  $\sigma$  симплексов, что

- все грани симплексов тоже входят в  $\sigma$  и
- пересечение любых двух симплексов из  $\sigma$  является их общей гранью.

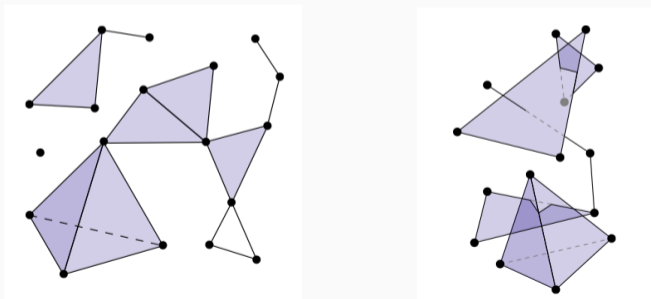


Рис. 1: Геометрический симплициальный комплекс и «некомплекс»



# Линк и звезда

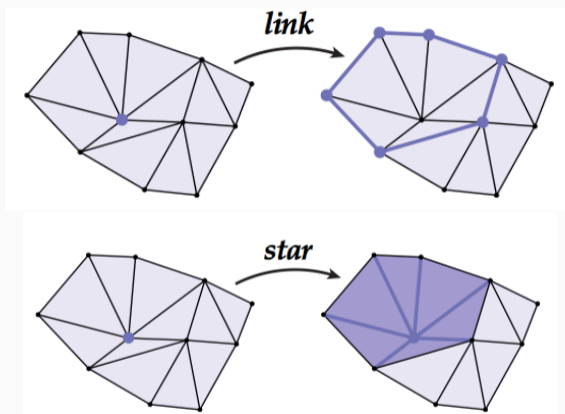


Рис. 2: Линк и звезда вершины комплекса

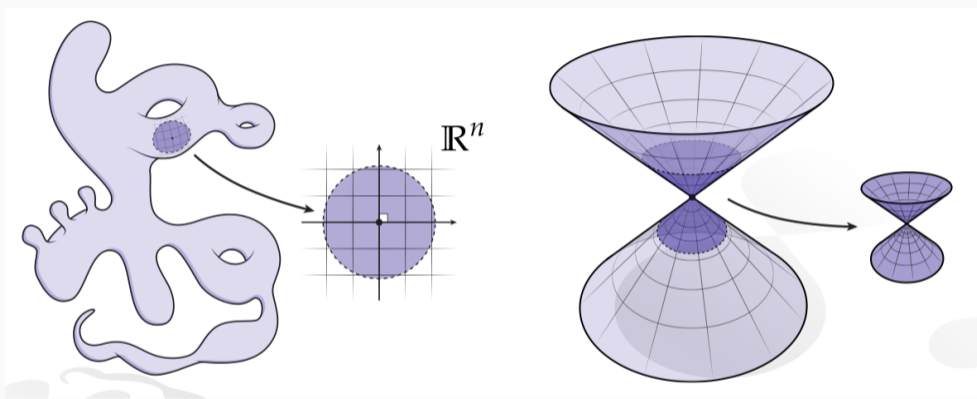
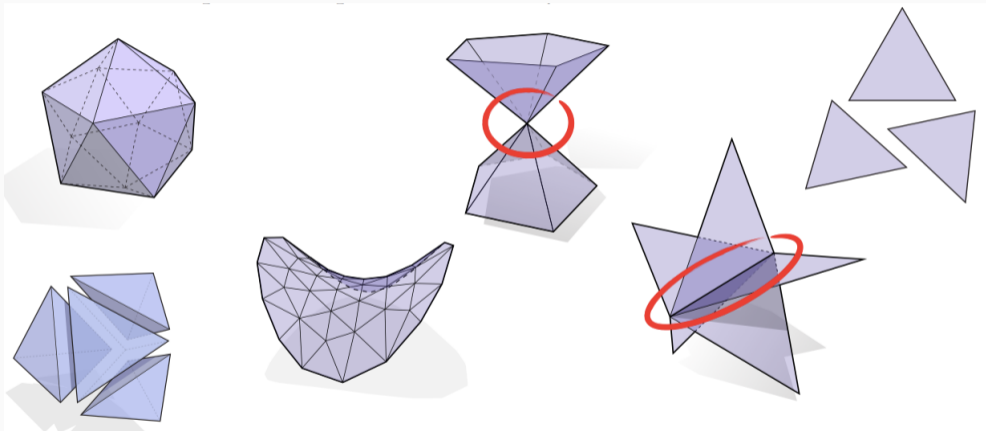


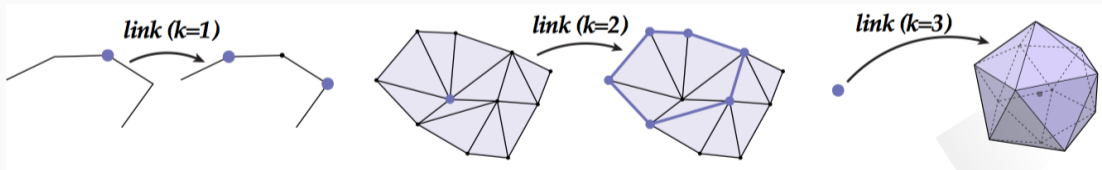
Рис. 3: Многообразия и не многообразия. Почему?

# Что здесь выглядит как многообразие?



# Симплициальные поверхности и многообразия

Симплициальная поверхность — это симплициальный  $k$ -комплекс, в котором линк всякой вершины гомеоморфен  $(k - 1)$ -мерной сфере (а звезда  $\simeq$  шару!).



## Согласованная ориентация

Согласованная ориентация на смежных симплексах — когда на общей грани она противоположна.

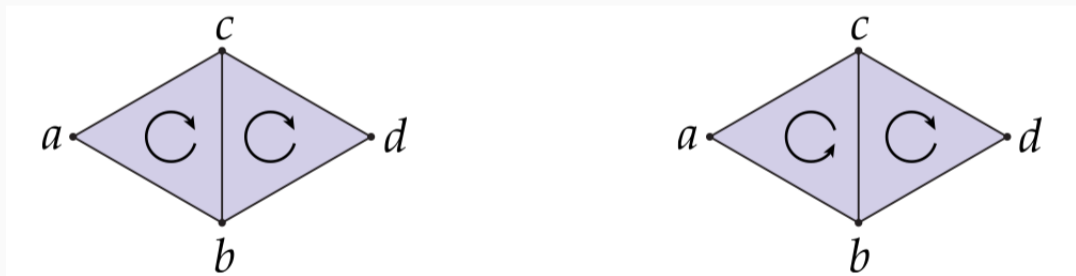
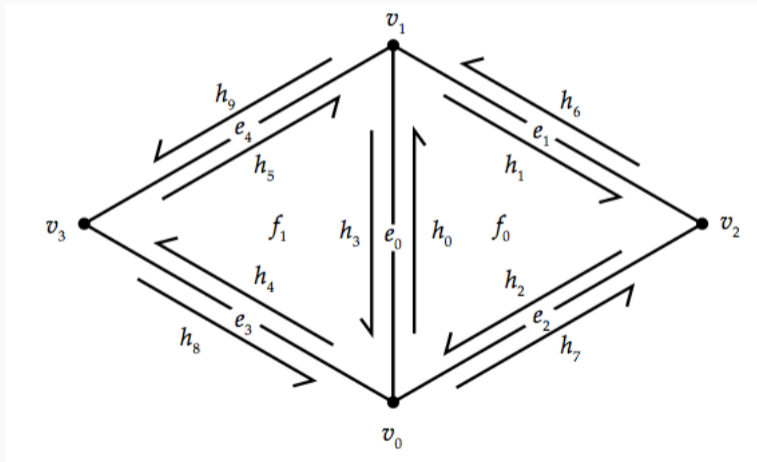


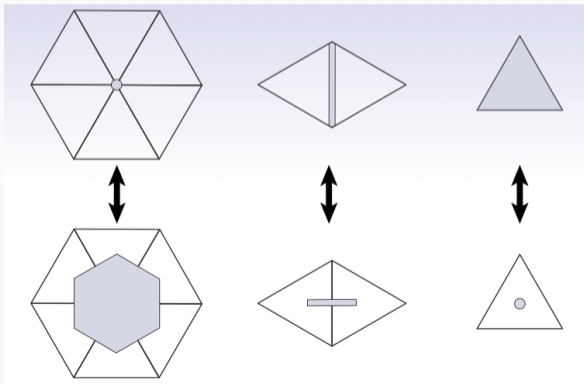
Рис. 4: Где какая?

Можно задавать комплекс полуребрами.



# Двойственная сетка

Симплициальная поверхность — сетка  $\{V, E, F\}$ . Двойственная сетка —  $\{V^*, E^*, F^*\}$ . Вершина  $f^* \in V^*$ , двойственная грани  $f \in F$ , является центром (описанной окружности) этой грани. Ребро  $e^* \in E^*$  соединяет центры граней исходной сетки, смежных по ребру  $e \in E$ .



## Список литературы:

- [1] Keenan Crane — Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction, 2018.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
- [3] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет.