Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 3: Топология и гладкие поверхности

Богачев Николай Владимирович

16 сентября 2020

MIPT & Skoltech

Экскурс в топологию

Топологическое пространство — множество X с выделенным семейством τ его подмножеств, для которого верно

$$(1)\ \emptyset, X \in \tau; \quad (2)\ A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau;$$

$$(3)\ \forall \alpha\ X_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha X_\alpha \in \tau.$$

Множества из τ — **открытыми**, а само τ — **топология.**

Топологическое пространство

Примеры

(1) $\tau = (\emptyset, X)$ – **минимальная (тривиальная)** топология

(2) $\tau = 2^X$ – **максимальная (дискретная)** топология

(3) топология **метрического** пространства (стандартный пример — $\mathbb{R}^n$).

Хаусдорфово топологическое пространство

Топологическое пространство (X, τ) называется **отделимым** или **хаусдорфовым**, если для всяких двух различных точек $x, y \in X$ найдутся такие непересекающиеся открытые множества A и B, что $x \in A$, $y \in B$.

Хаусдорфово топологическое пространство

Примеры

(1) $\tau = (\emptyset, X)$ – тривиальная топология **не** хаусдорфова

(2) $\tau = 2^X$ – максимальная (дискретная) топология хаусдорфова

(3) метрические пространства всегда хаусдорфовы.

Основные понятия

- **Замкнутое** множество — дополнение к открытому;
- **Замыкание** $\overline{A}$ множества A есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.
- Если $\overline{A} = X$, то A называют **всюду плотным** в X.
- Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ **непрерывно в точке** $x \in X$, если для всякого открытого $V \subset Y$, такого что $f(x) \in V$, найдется такое открытое $U \subset X$, что $f(U) \subset V$.

Основные понятия

- $f : X \to Y$ — **непрерывно**, если оно непрерывно в каждой точке.
- Отображение $f : X \to Y$ – **гомеоморфизм**, если оно биективно, непрерывно и f^{-1} непрерывно.
- Множество — **компактно (или компакт)**, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Многообразия

- **Карта** на M — гомеоморфизм φ некоторого открытого $U \subset M$ на некоторую открытую область в $\mathbb{R}^n$.
- Карты (U, φ) и (V, ψ) **согласованы**, если

$$\psi\varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

гладкое.

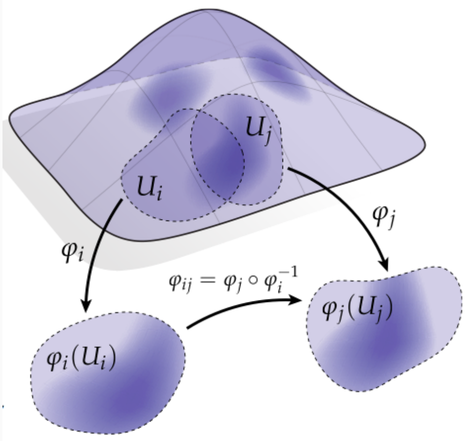
Многообразия

- **Атлас** — система согласованных карт, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ покрывающих пространство M.
- Два атласа $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (V_β, ψ_β) **эквивалентны**, если карты одного согласованы со всеми картами второго, то есть функции "склейки"

$$\psi_\beta \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

гладкие.

Хаусдорфово пространство с классом эквивалентных атласов — **гладкое n-мерное многообразие**.



Примеры многообразий

(1) $\mathbb{R}^n$. Здесь достаточно взять карту $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$;

(2) Можно взять произвольную открытую область $U \subset \mathbb{R}^n$;

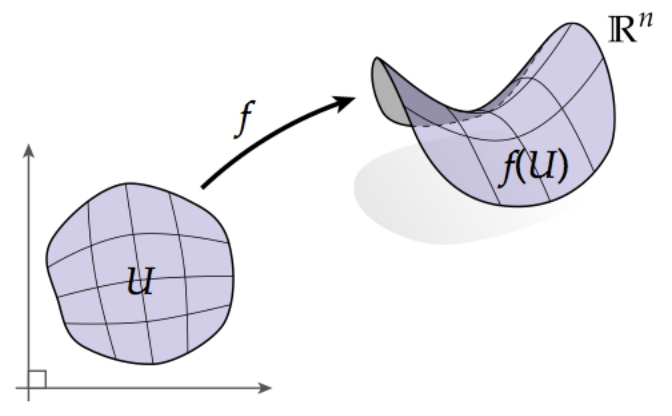
(3) $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$.

Доказательство.

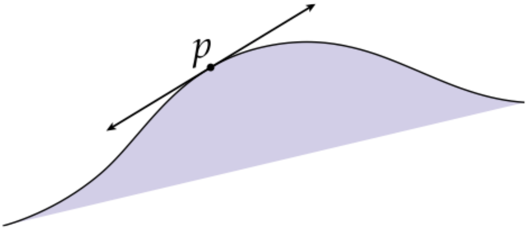
Пусть $N = \{0, \ldots, 0, 1\}$ и $S = \{0, \ldots, 0, -1\}$. Рассмотрим стереографические проекции ϕ_N и ϕ_S из точек N и S соответственно. Имеем две карты $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \phi_N)$ и $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \phi_S)$. $\square$

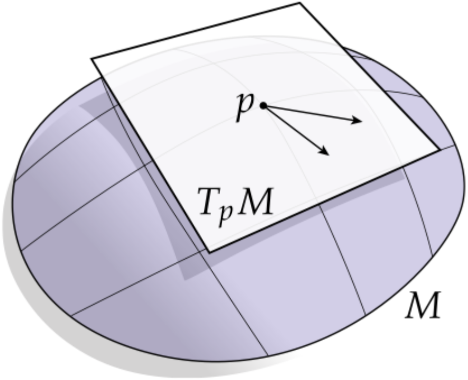
Поверхности

Гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ — тоже многообразие!!



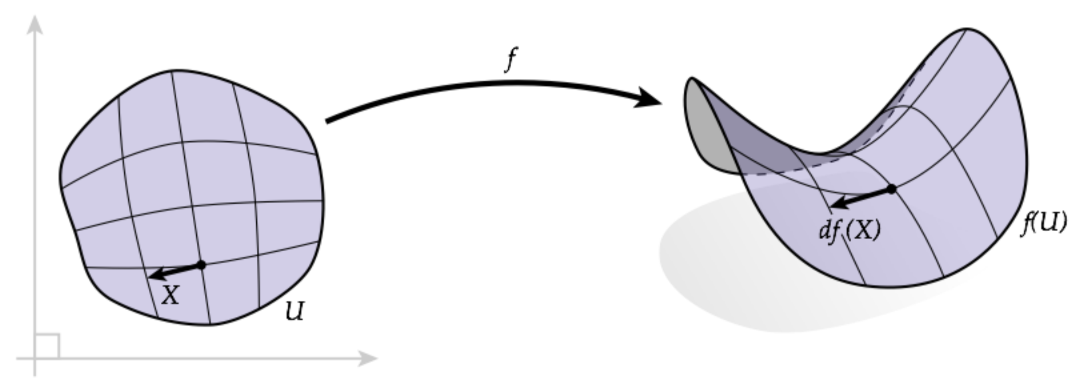
Касательное пространство к поверхности — множество всех касательных векторов.





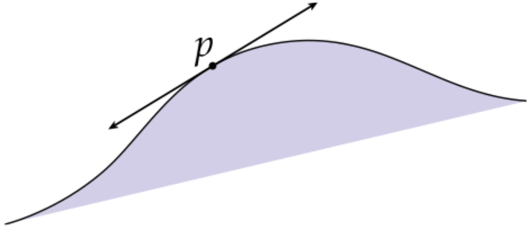
Дифференциал отображения (поверхности)

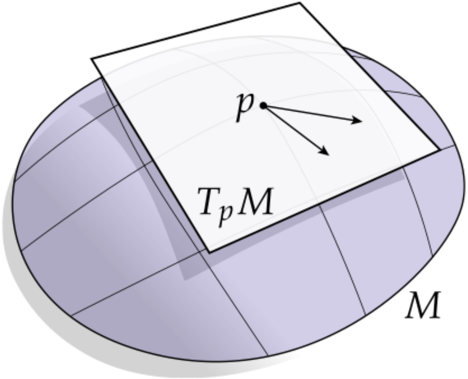
Дифференциал отображения — это линейное отображение на касательных векторах



Касательное пространство

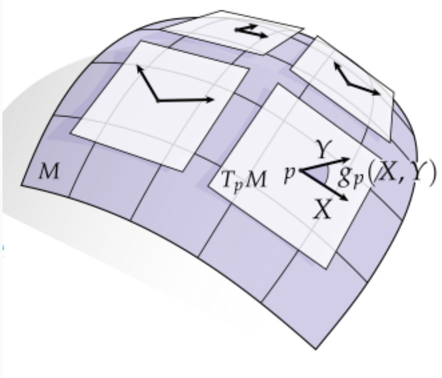
Канонический базис — векторы $e_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, e_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$.





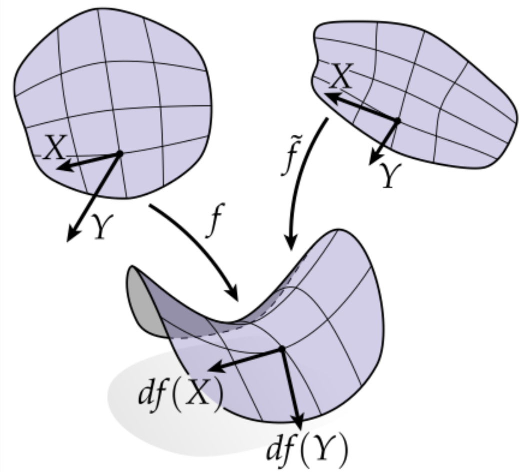
Риманова метрика

- Большинство вычислений сводятся к метрическим.
- Это позволяет сделать **риманова метрика**
- **Абстрактно:** положительно определённая билинейная форма, гладко зависящая от точки.



Евклидова риманова метрика, индуцированная вложением

- Обычно поверхность задана вложением $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Как вычислить $g(X, Y)$?
- Нельзя использовать $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на T_pM. Почему?
- **Индуцированная метрика:** $g(X, Y) := \langle df(X), df(Y)\rangle$



I квадратичная форма

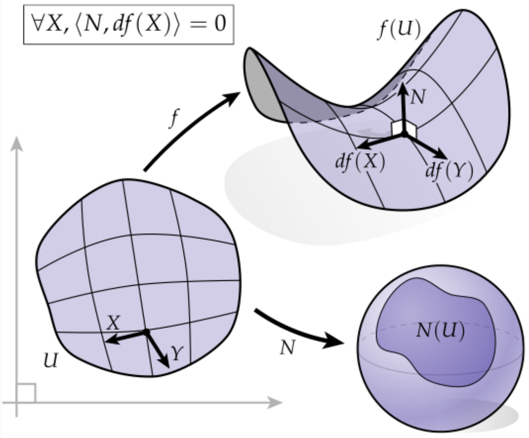
Пусть $M = f(U)$, $p \in M$. Тогда на T_pM есть $(\cdot, \cdot)$.

Матрица I квадратичной формы:

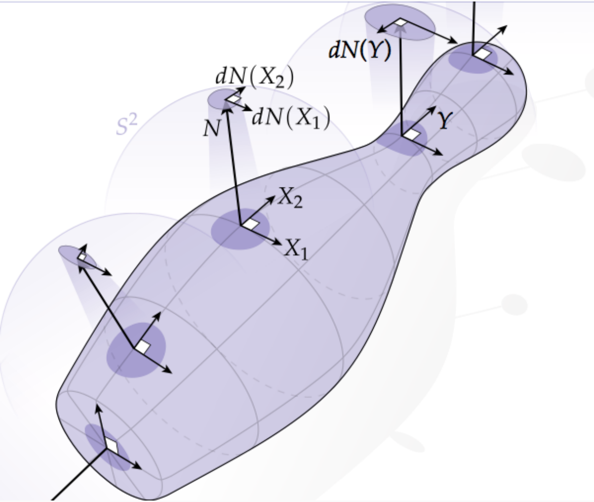
$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

Отображение Гаусса

- Вектор нормали — перпендикуляр к T_pM!
- **Отображение Гаусса:** $N\colon M \to \mathbb{S}^2$
- Оно непрерывное!

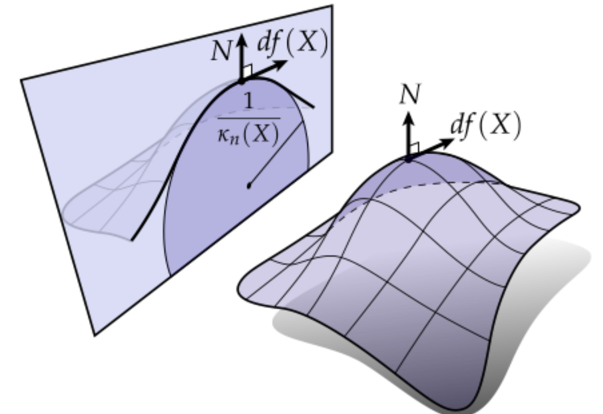


- **Отображение Вайнгартена:** $dN\colon TM \to T\mathbb{S}^2$
- В каждой точке — это изменение вектора N вдоль X!
- Касательный к поверхности (и сфере)



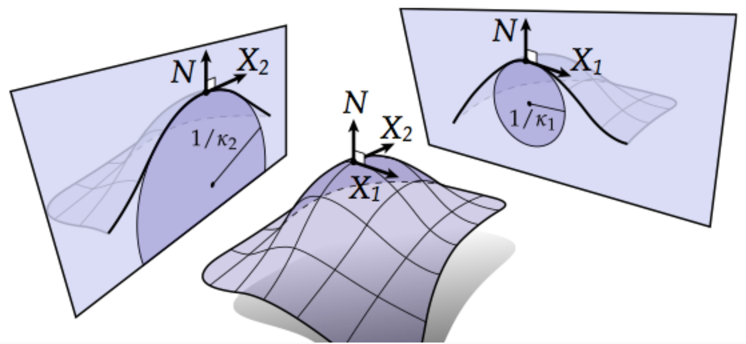
Нормальная кривизна

$$k_n(X) := \frac{(df(X), dN(X))}{(df(X), df(X))}$$



Главные кривизны

$$dN(X_j) = k_j df(X_j)$$



Оператор формы (Shape Operator)

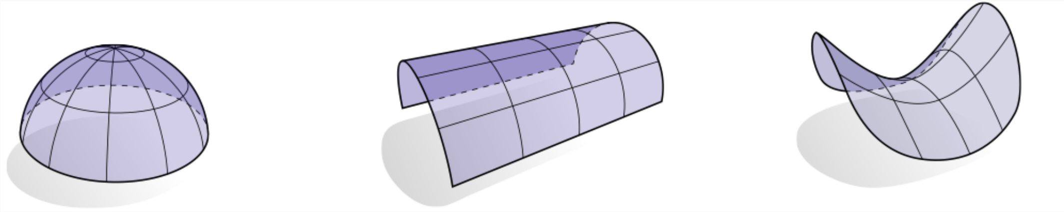
$$S\colon T_pM \to T_pM, \quad df(SX) = dN(X)$$

Главные направления — собственные векторы S!

Главные кривизны — собственные значения S!

Гауссова и средняя кривизны

$$K := k_1 k_2, \qquad H = k_1 + k_2$$



Список литературы:

[1] Keenan Crane — Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction, 2018.

[2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекция 1, стр. 5 – 14

[3] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет. *Лекция 1, стр. 3 – 10*