Дифференциальные формы. Интеграл. Теор. Стокса.

(1) Внешние формы

$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ (базис), тогда $V^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$,

где $f_i(e_j) = \delta_{ij}$

k-форма: кососимм. полилин. ф-ция на V, т.е.

$\omega^k(v_1, \dots, v_k)$.

$\Lambda^k(V) =$ пр-во k-форм $= \langle f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k} \mid j_1 < \dots < j_k \rangle$

$\Lambda^1(V) = V^*$, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$

Здесь $f_1 \wedge \dots \wedge f_k (v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j))$

$\omega_1^k \wedge \omega_2^l = \omega^{k+l}$

$\star : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$, где $\star(\underbrace{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}) = \underbrace{f_{k+1} \wedge \dots \wedge f_n}$

т.е. $\star$(моном) $\wedge$ (моном) $= f_1 \wedge \dots \wedge f_n$

Пусть $A: V \to W$ — лин. отобр. вект. пр-в.

$A^*\omega^k \in \Lambda^k(V) \xleftarrow{A^*} \omega^k \in \Lambda^k(W)$, т.е. $A^*: \Lambda^k(W) \to \Lambda^k(V)$

$\omega^k(Av_1, \dots, Av_k)$

② Дифф. формы на M: дифференциал

$$T_xM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$$

$$T_x^*M = \langle dx_1, \ldots, dx_n \rangle$$

Дифф. k-форма на M:

$$\omega^k = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

1) k-форма на каждом T_xM

2) ω^k гладко зависит от $x \in M$, т.е.

$$\omega_{j_1 \ldots j_k} \in C^\infty(M).$$

Дифф-л формы: $d: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$, где

$$d\omega^k = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} d\omega_{j_1 \ldots j_k}(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

$$\left[d(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j \right]$$

Известно, что $d \circ d = 0$; $d(\omega_1^k \wedge \omega_2^l) = d\omega_1^k \wedge \omega_2^l + (-1)^k \omega_1^k \wedge d\omega_2^l$

③ Интегрирование дифф. форм

1) Интегрирование n-формы! по карте $(\mathcal{U}, \varphi)$.

$\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{homeo} \mathbb{R}^n$ (или шар/...) ; $\omega^n \in \Lambda^n(M)$

$\omega^n = \omega(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Тогда
$$\boxed{\int_{\mathcal{U}} \omega^n := \int_{\varphi(\mathcal{U})} \omega(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n}$$

2) $\mathcal{U} \cap V = \varnothing$, то $\displaystyle\int_{\mathcal{U} \sqcup V} \omega^n = \int_{\mathcal{U}} \omega^n + \int_V \omega^n$

3) Разбиение единицы.

Пусть (X, τ) – тополог. пр-во

Разб. ед. – это семейство функций $h_j : A_j \to \mathbb{R}$, где A_j образуют лок. конечное покрытие X. и

$$\sum_j h_j(x) \equiv 1.$$

4) Пусть $\omega^n \in \Lambda^n(M)$, где $\operatorname{supp} \omega^n$ – компактен, т.е. $\omega^n \neq 0$ на картах $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_N$.

$(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ – лок кон атлас, тогда сущ. разб. ед., подчиненное атласу и

$$\boxed{\int_M \omega^n := \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{U}_j} h_j \cdot \omega^n}$$

5) Пусть $N \subset M$ — k-мерное подмногообразие, т.е. $i: N \to M$ — вложение, и пусть $\omega^k \in \Lambda^k(M)$.

Тогда $(di)^*\omega^k \in \Lambda^k(N)$ и

$$\int_N \omega^k := \int_N (di)^*\omega^k$$

$$i: N \longrightarrow M$$

$$di: T_xN \longrightarrow T_xM$$

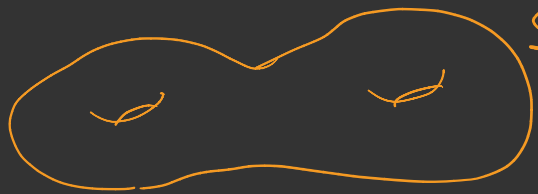
$$(di)^*: \Lambda^k(T_xM) \longrightarrow \Lambda^k(T_xN)$$

Важное приложение:

Пусть M — (ориентируемое) гладкое n-мн-е с краем ∂M (с согласов. ориентацией).
(∂M явл. $(n-1)$-подмн-ем в M).

Теор (Стокса) Пусть $\omega^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(M)$. Тогда

$$\int_{\partial M} \omega^{n-1} = \int_M d\omega^{n-1}$$



S_g

Про теор. Стокса: Иванов–Тужилин 2я книга

Про дифф. формы: Арнольд В.И. "Мат методы механики"