Поверхности и кривизны.

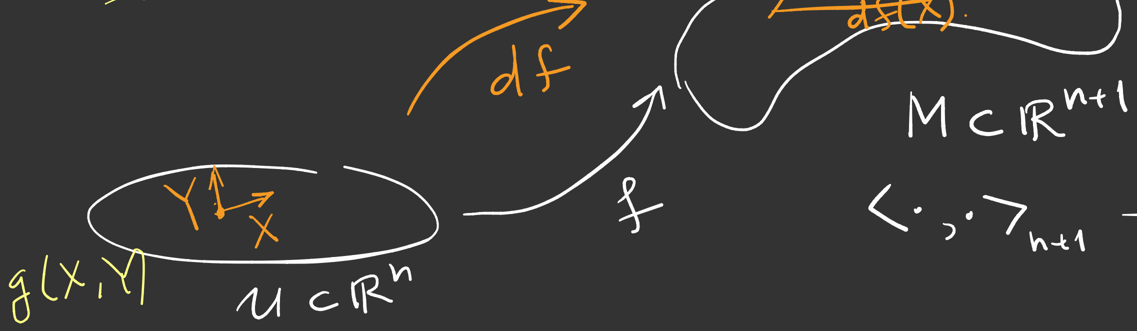
① Пусть $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ регулярное отобр., то есть $\operatorname{rank} J_x(f) = n$.
(во всех точках)

$\Longleftrightarrow$ $e_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, e_n = \frac{\partial f}{\partial u_n}$ – лин/нез. векторы.

Тогда $f(U) = M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – поверхность.

Здесь $df: TU \to TM$ – дифференциал отобр f, т.е. линейное отображение касат. пр-в.

$\left(Mat(df) = J(f) \right)$



$\langle \cdot , \cdot \rangle_{n+1}$ – евкл. скал. умн-е в $\mathbb{R}^{n+1}$

② Риманова метрика $\simeq$ I квадр. форма.

Опр. $g(X,Y) := \langle df(X), df(Y) \rangle$

Посмотрим на это в базисе $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = T_x M$

Тогда $g(X,Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle = X^T \cdot G \cdot Y$, где

$G = J_f^T \cdot J_f$. Т.е. матр. I кв. формы $G = G(e_1, \ldots, e_n) =$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \ldots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \ldots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

③ Shape operator = оператор формы.

$S: T_x U \to T_x U$, т.что $df(SX) = dN(X)$.

Предл.1. Линейный оператор S — самосопряжённый, т.е.

$$g(SX, Y) = g(X, SY)$$

Пруф: $N : M \to S^2$, т.е. $dN_x : T_xM \to T_{N(x)}S^2$

$g(SX, Y) = \langle df(SX), df(Y)\rangle = \langle dN(X), df(Y)\rangle$ и

$g(X, SY) = \dots = \langle df(X), dN(Y)\rangle$

Заметим, что $\underbrace{\langle df(X), N\rangle}_{\text{вдоль } Y} = \underbrace{\langle df(Y), N\rangle}_{\text{вдоль } X} = 0$ $\quad (d(A\cdot B) = dA\cdot B + A\cdot dB)$

Продифференцируем и получаем, что

$$\langle df(X), dN(Y)\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}, N\right\rangle = 0$$

$$\Leftarrow \quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\langle df(Y), dN(X)\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial X}, N\right\rangle = 0$$

④ II квадр. форма.

Опр. $\mathrm{II}(X,Y) = -g(SX,Y) \overset{\text{Пр.1}}{=} -g(X,SY) = -\langle df(X), dN(Y)\rangle$
$= -\langle df(Y), dN(Y)\rangle$

Предл.2.
$$\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) = \begin{pmatrix} \langle N, f_{u_1u_1}\rangle & \cdots & \langle N, f_{u_1u_n}\rangle \\ \vdots & \ddots & \\ \langle N, f_{u_nu_1}\rangle & \cdots & \langle N, f_{u_nu_n}\rangle \end{pmatrix},$$

где $f_{u_iu_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$

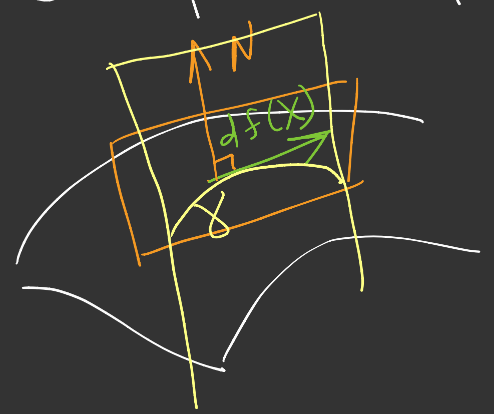
Пруф. Следует из док-ва Пр.1, а именно,

$$\mathrm{II}(X,Y) = -\langle df(X), dN(Y)\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}, N\right\rangle.$$

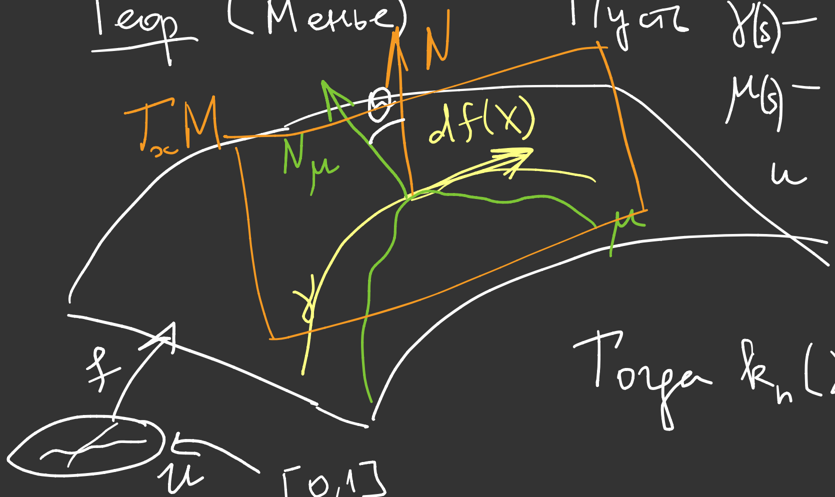
$= X\ \mathrm{Mat}(\mathrm{II})(Y)$

⑤ Нормальная кривизна $\quad k_n(x) = \overbrace{\text{кривизна нормального сечения}} = \tilde{k}(\gamma) =$

$$= \pm k(\gamma)$$



Теор (Менье)



Пусть $\gamma(s)$ — норм. сечение M вдоль $df(X)$

$\mu(s)$ — какая-то кривая, т.ч. $\underline{\dot{\mu} = df(X)}$ $\quad \Downarrow \quad |df(X)| \equiv 1$

и $\angle(N, N_\mu) = \theta$.

Тогда $k_n(X) = \overset{>0}{k(\mu)} \cdot \cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}(X,X)}{1 = g(X,X)}$.

Док-во: $\quad \mu = f(u(s)), \quad \gamma = f(v(s))$.

Тогда $\quad \ddot{\mu}(s) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \dot{u}_i \cdot \dot{u}_j + \sum\limits_{k=1}^{n} \overset{= \frac{\partial f}{\partial u_k}}{e_k} \cdot \ddot{u}_k$

$$\ddot{\gamma}(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_j} \cdot \dot{v}_i \dot{v}_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot \ddot{v}_k$$

Заметим, что $\langle e_k, N \rangle = 0$. Тогда

$$\langle \ddot{\mu}, N \rangle = \langle k(\mu) \cdot N_\mu, N \rangle = k(\mu) \cdot \cos\theta =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \dot{u}_i \dot{u}_j = \mathrm{II}(X,X)$$

Итак, $\langle \ddot{\gamma}, N \rangle \underset{\text{аналогично}}{=} k_n(X) = \mathrm{II}(X,X) = k(\mu) \cdot \cos\theta$ ▨

Следствие $\quad k_n(X) = \dfrac{\langle df(X), dN(X)\rangle}{\langle df(X), df(X)\rangle}$

6 Главные кривизны и направления.

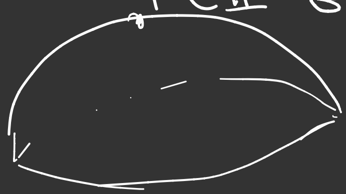
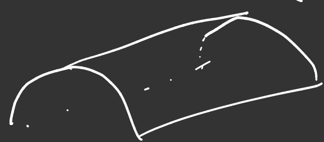
Опр $\quad S(X_j) = k_j X_j$

В базисе главных направлений

$$\mathrm{Mat}(g) = \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) = \mathrm{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

$$K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = \det(\mathrm{II} \cdot G^{-1}), \quad H = k_1 + \ldots + k_n = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(\mathrm{II}) \cdot G^{-1}) \quad (\;/n)$$


Теор Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ пов-ть в $\mathbb{R}^3$ (односв. связная)

Если $K(S) \equiv 1$, то $S = S^2$

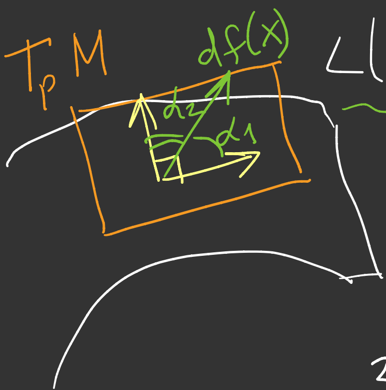
$K(S) \equiv 0$, то $S = E^2 = \mathbb{R}^2$

$K(S) \equiv -1$, то $S = H^2$ (плоскость Лобачевского)

Теор Пусть $f(U) = M$, $k_1, \dots, k_n$ — главные кривизны.

Тогда $\max\limits_{\|df(X)\|=1} k_n(X), \ \min\limits_{\|\ \|=1} k_n(X) \in \{k_1, \dots, k_n\}$.

Док-во: Пусть $e'_k = df(X_k)$, и пусть



$$\angle(df(X), e'_k) = \alpha_k \Rightarrow df(X) = \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k \cdot e'_k$$

Тогда $k_n(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \cdot \cos^2\alpha_j$

Заметим, что $1 = g(X,X) = \sum\limits_{j=1}^{n} \cos^2\alpha_j$

Пусть $k_1 \geq k_j$, тогда $\left(\cos^2\alpha_1 = 1 - \sum\limits_{j=2}^{n} \cos^2\alpha_j\right)$

$$k_n(X) = k_1 - \sum_{j=2}^{n} (k_1 - k_j)\cos^2\alpha_j \leq k_1.$$