ГКП Лекция 4

① Гладкие мн-я

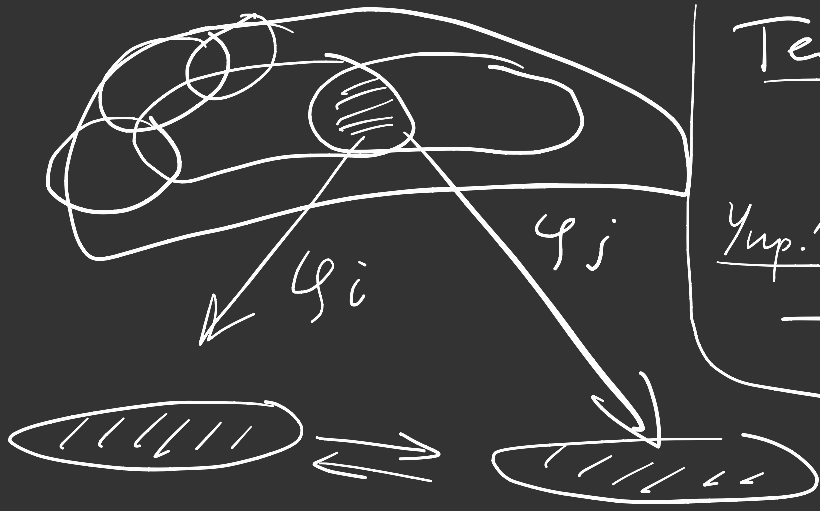
M - хаусд. топ. пр-во со сч. базой

(U, φ) — карта на M, где $U \underset{\text{откр}}{\subset} M$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$

(U_i, φ_i), (U_j, φ_j) согласованы, если

$$\varphi_{ij} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi_i(U_i \cap U_j)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi_j(U_i \cap U_j)}} \quad \text{гладкие}$$

Мн-е



Теор. Все карты одной размерности.

Упр. 1 $\mathbb{R}^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$

$S^n \simeq S^m \Leftrightarrow n = m$

U, $(x_1, \ldots, x_n)$

V, $(y_1, \ldots, y_n)$

$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$

② Многообразия с краем

Карты двух типов:

- (U, φ), $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$
- (V, ψ), $\psi: V \to \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_n \geq 0\}$.

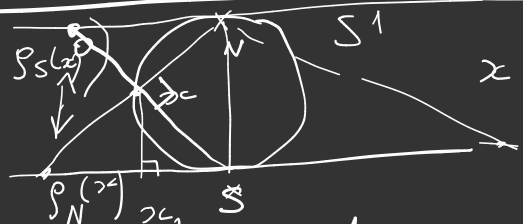
Краевые карты

Def. $x \in M$, т.ч. они суть $\psi^{-1}(\underset{\partial \mathbb{R}^n_+}{\mathbb{R}^{n-1}})$ называются краевыми точками.

Край $= \partial M$

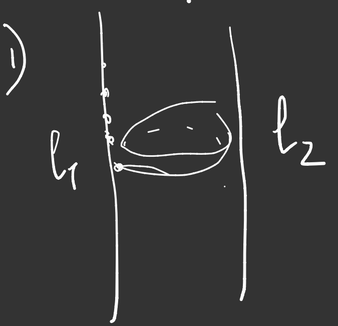
③ Примеры

0)



S^1 — гладкое 1-мерное мн-е без края, т.е. $\partial S^1 = \varnothing$

1)



$C \setminus l_1 \simeq \mathbb{R}^2$

$C \setminus l_2 \simeq \mathbb{R}^2$

C — гладкое 2-мерное мн-е,

$\partial C = \varnothing$

2)

$C' \setminus l_1 \simeq \mathbb{R}^2_+$

$\partial C' = S^1$

Утв. Край не всегда является топологической границей

3) шар B^n — n-мерное мн-е с краем где $\partial B^n = S^{n-1}$

$\partial B^2 = S^1$

Теор. Пусть M — n-мерное мн-е с краем.
Тогда ∂M = $n-1$ мерное мн-е без края.

Идея док-ва: Взять краевые карты ЛЭИ.

Пов-ть

$$f: U \to \mathbb{R}^3, \quad U \subset \mathbb{R}^2$$

$$f(U) = M.$$

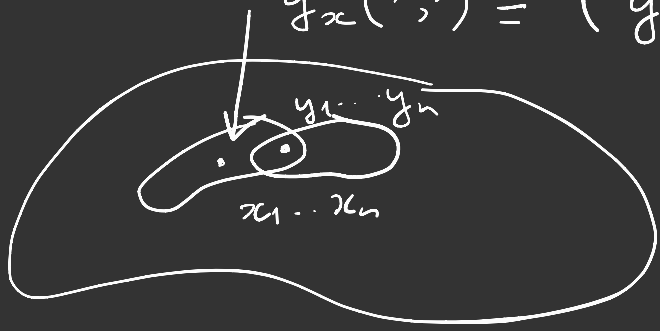
$$\boxed{\operatorname{rk} J(f) = 2 \text{ во всех т. } U}$$

$\Rightarrow M$ — 2-мерное гладкое мн-е.

Иванов - Тужилин
"Дифгеом"

$U \subset \mathbb{R}^2$

$$g_x(\cdot,\cdot) = \left(g_{ij}(x)\right) > 0$$



M

Опр Риманова метрика.

C: замена координат

$$e_i' = \sum c_{ij} e_j$$

$$G' = C^T G C$$

Опр Гладкое мн-е с римановой метрика = риманово мн-е (M, g)

Д. Нэш "Игры разума"

$$f : \underset{\subset \mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}^n$$

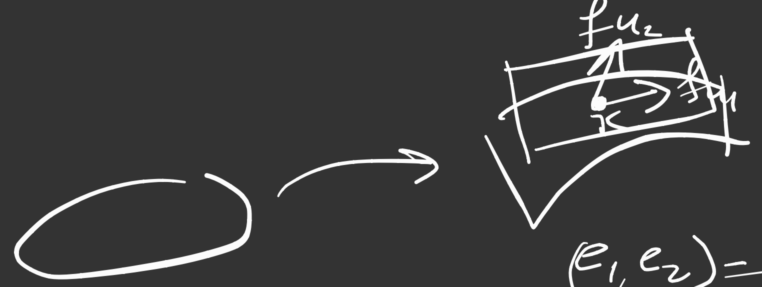
$$f \begin{cases} f_1(u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(u_1, \dots, u_m) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = f_{u_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)$$

$$\vdots$$

$$f_{u_m} = (\dots)$$

$\underset{\max}{\operatorname{rk} J(f)} \Rightarrow f_{u_1}, \dots, f_{u_m}$ — лин/нез.



$e_1^{(x)}, e_2^{(x)}$

$e_1^{(x)} = (a, b, c)$, $e_2^{(x)} = (d, e, f)$

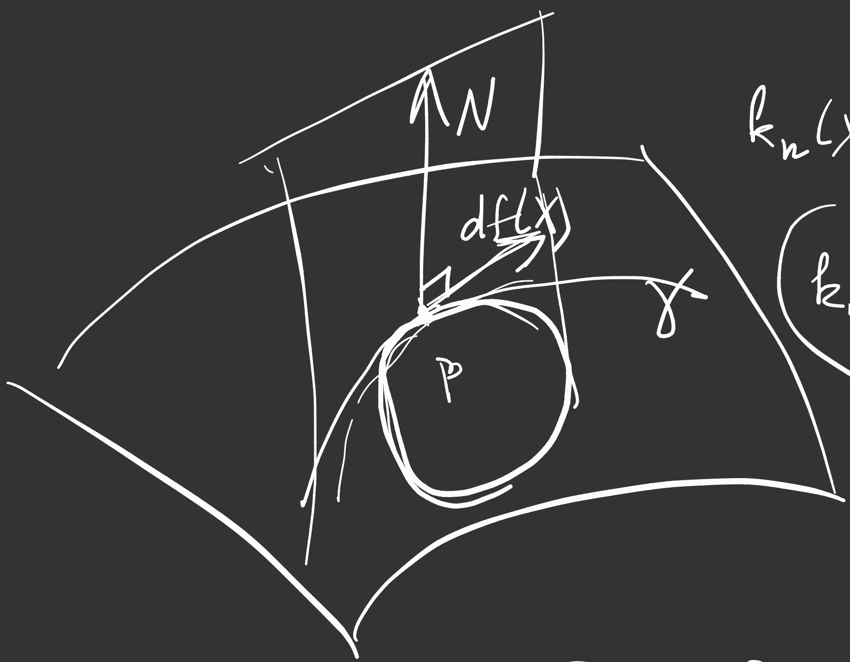
$$\langle e_1, e_2 \rangle = ad + be + cf$$

$$G = G(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \; x_2)(G)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$g(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle = X^T G Y$$

$$\boxed{G = J_f^T \cdot J_f}$$



n(γ) и N сонаправлены

$$k_n(X) = \pm k(\gamma)$$

$\Updownarrow$

$$k_n(X) = \frac{\langle df(X), dN(X) \rangle}{\langle df(X), df(X) \rangle}$$

Задача с семинара

$$N = \frac{[e_1 \times e_2]}{\| [e_1 \times e_2] \|}$$