Лекция 12. Лапласиан

(Введение)

① Итак, пусть M — гладкое мн-е (возможно, с краем ∂M)

Тогда $\dim T_xM = n$; $T_xM = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$

$T_x^*M = \langle dx_1, \dots, dx_n \rangle$.

k-формы на M: $\Lambda^k(M) = \{ \sum\limits_{j_1<\dots<j_k} \omega_{j_1\dots j_k}(x)\, dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k} \}$.

$\dim \Lambda^k(M) = C_n^k$.

$\Lambda^0(M) \cong C^\infty(M)$; $\Lambda^1(M) \cong T^*M$.

Дифференциал $d: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ $\left(\sum\limits_{j_1<\dots<j_k} d\omega_{j_1\dots j_k} \wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}\right)$

Кодифф: $\delta: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$; $\boxed{\delta := *d*}$, где $*: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$ (звезда Ходжа)

[На (M,g) $*$ и δ задаются немного иначе]

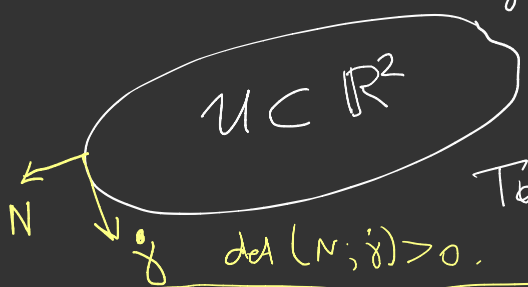
Упр. 1 Док-ть, что $d \circ d = 0$ и $\delta \circ \delta = 0$. (скорее для ∇)

Теор. (Стокса) Пусть $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ (supp ω компакт), где M — ориентируемое n-мерное мн-е с краем ∂M (ориентация на ∂M согласована с M). Тогда
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Следствие 1 (формула Грина)

$\partial U = \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ гладкая (регул.) кривая.

Пусть $V = (P(x,y), Q(x,y))$ — гладкое вект. поле на $\overline{U}$.

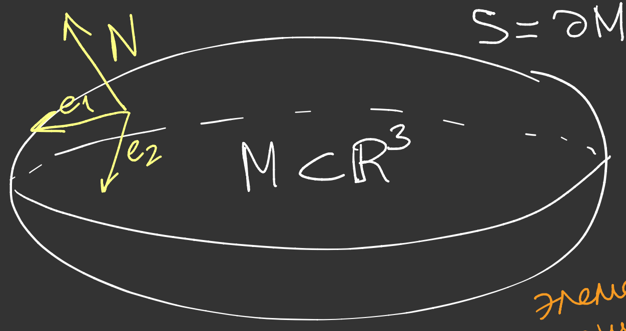


$\det(N; \dot\gamma) > 0$.

Тогда $\oint\limits_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int_a^b \left[P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \right] dt = \int_a^b \langle V(t); \gamma'(t) \rangle\, dt$

$$\int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

Следствие 2 (формула Гаусса–Остроградского)



$V = (V_1, V_2, V_3)$ – вект. поле на M

$$\operatorname{div} V = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \operatorname{tr} J_x(V)$$

$$\int_S \langle V, N \rangle \underbrace{dA}_{\text{элемент площади}} = \int_M \operatorname{div} V \underbrace{dv}_{\text{элемент объема}}$$

(M, g) с краем ∂M $(\partial M, g_1)$

$vol_M = vol_g$

$vol_{\partial M} = vol_S = vol_{g_1}$

$vol_g = \sqrt{\det g}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\boxed{\int_{\partial M} \langle V, N \rangle\, vol_S = \int_M \operatorname{div} V\, vol_M}$$

Следствие 3 (формула Стокса для пов-тей).

$V = (V_1(x_1, x_2, x_3), V_2, V_3)$ – вект. поле в $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot} V = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3};\ \ldots;\ \ldots \right)$$

Пусть $M = f(U) \subset \mathbb{R}^3$ – (компактная) гл. рег. пов-ть; $N = \dfrac{[f_{u_1} \times f_{u_2}]}{\|[f_{u_1} \times f_{u_2}]\|}$, $\|[f_{u_1} \times f_{u_2}]\| = \sqrt{\det(g)}$

$$\boxed{\int_M \langle \operatorname{rot} V, N \rangle \underbrace{vol_M}_{du_1 \wedge du_2} = \int_{\partial M} \langle V, e \rangle\, vol_{\partial M}}$$

(сводится к $\int dt$)

② Римановы многообр-я и Лапласиан

(M,g) – рим. мн-е (воз. с ∂M), где $\boxed{g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j}$

$vol_g = \sqrt{\det(g)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ $\qquad g = (g_{ij}) > 0$

Звезда Ходжа: $\quad (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) \wedge \star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = vol_g$

1) $\star 1 = vol_g$

2) $\star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = \sqrt{\det(g)}\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$

3) $\star^{-1}(dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n) = \dfrac{(-1)^{?}}{\sqrt{\det(g)}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$

4) $\star\star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ $\quad$ (?!) $\quad \boxed{\star\star\omega = \omega}$

Ко дифф-л: $\quad \delta = \star^{-1} d \star \quad ; \delta : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$

1) $\delta \circ \delta = 0$

2) $f \in C^\infty(M)$, то $\delta f = 0$.

Скалярное произведение

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(M)$. Тогда

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_M \omega_1 \wedge (\star \omega_2)$$

Теор. Пусть M – многообр-е без края; $\alpha \in \Lambda^k(M)$, $\beta \in \Lambda^{k+1}(M)$.

Тогда $\langle d\alpha, \beta \rangle = (-1)^{k+1} \langle \alpha, \delta\beta \rangle$ (для "старой" $\star$ Ходжа $(-1)^{nk+1}$, т.к. $\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$)

Док-во: $\langle \alpha, \delta\beta \rangle = \langle \alpha, \star^{-1} d \star \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \star\star^{-1} d\star\beta = \int_M \alpha \wedge d\star\beta$

$$d(\underset{k}{\alpha} \wedge \underset{n-k-1}{\star\beta}) = \underbrace{d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\star\beta)}_{n\text{-форма}}$$

По теор. Стокса

$$\int_M d(\alpha\wedge *\beta) = \int_{\partial M=\varnothing} \alpha\wedge *\beta = 0$$

Следовательно,

$$\int_M d\alpha\wedge *\beta + (-1)^k \underbrace{\int_M \alpha\wedge d*\beta}_{} = 0$$

$$\langle d\alpha,\beta\rangle = \int_M d\alpha\wedge *\beta = (-1)^{k+1}\langle\alpha,\delta\beta\rangle$$ ☒

(Laplace – de Rham operator)

Лапласиан: Пусть $\omega\in\Lambda^k(M)$. Тогда

$$\Delta\omega := (d+\delta)^2 = d\delta+\delta d.$$

Теор. Пусть (M,g) – гладкое риманово многообразие.

1) $\langle\Delta\omega_1,\omega_2\rangle = \langle\omega_1,\Delta\omega_2\rangle$ (самосопряж).

2) $\langle\Delta\omega,\omega\rangle \overset{?}{\geq} 0$

3) Пусть $f\in C^\infty(M)$. Тогда $\Delta f = \delta df \overset{?}{=} -\mathrm{div}_g\circ \mathrm{grad}_g(f)$

(классический лапласиан для ф-ций).

В частности, для $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}$$

Док-во

1) $\langle \Delta\omega_1, \omega_2\rangle = \int \Delta\omega_1 \wedge (\star\omega_2) = \int (d\delta + \delta d)\omega_1 \wedge \star\omega_2.$

Заметим, что $\langle d\alpha, \beta\rangle = (-1)^{nk+1}\langle \alpha, \delta\beta\rangle$. Тогда

$\langle \Delta\omega_1, \omega_2\rangle = \langle d(\delta\omega_1), \omega_2\rangle + \langle \delta(d\omega_1), \omega_2\rangle =$

$\overset{?}{=} (-1)^{nk+1}\Big[\langle \delta\omega_1, \delta\omega_2\rangle + \langle d\omega_1, d\omega_2\rangle\Big].$

Правая часть аналогично.

$\Delta = (d+\delta)^2 \geq 0$

2) $\langle \Delta\omega, \omega\rangle = \cancel{(-1)^{nk+1}}\Big[\underbrace{\langle \delta\omega, \delta\omega\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle d\omega, d\omega\rangle}_{\geq 0}\Big]$

Надо что-то делать со знаком.

3) Пусть $f \in C^\infty(M)$. Тогда докажем, что

$\Delta f = \delta df = -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}(f)$ $\quad (\operatorname{grad}(f) = \nabla f)$

$(k=0;\ nk+1=1)$

$\delta = (-1)^{nk+1}\star d \star$

$\delta df = \underset{(\star^{-1} d \star)}{\overset{\|}{\delta}}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j\right) = \frac{(-1)}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{|\det g|}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

Градиент:

$\operatorname{grad}_g : C^\infty(M) \to \overset{\text{вект. поля}}{V(TM)}$, т.что $(\operatorname{grad}_g f, X) = df(X)$.

Ясно, что $\operatorname{grad}_g = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, где $T_xM = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$

$(g^{ij}) = G^{-1}$

Дивергенция:

$\forall X \in V(TM)$ и $\omega \in \Lambda^n(M)$ определим $i_X\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$:

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_n).$$

Тогда $d(i_X\omega) = \underbrace{(\text{ф-ция коэфф-нт})}_{= \operatorname{div}_\omega X} \cdot \omega$

Пусть $\omega = \mathrm{vol}_g$; тогда $\operatorname{div}_g := \operatorname{div}_{\mathrm{vol}_g}$.

Если $X = \sum\limits_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, то $i_X \mathrm{vol}_g\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \cancel{\frac{\partial}{\partial x_k}} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = (-1)^{k-1} x_k \sqrt{|\det g|}$

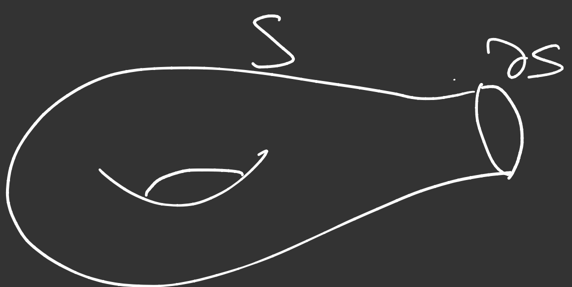
Тогда $\operatorname{div}_g(X) = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j \sqrt{|\det g|}\right)$

Осталось расписать $-\operatorname{div}_g(\operatorname{grad}(f)) = \dots$ $\boxtimes$

Теорема (Гаусса-Бонне)

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ - 2-мерная поверхность с краем ∂S и гауссовой кривизной K. Тогда

$$\boxed{\int_S K\,dA + \int_{\partial S} k_{\partial S}\,ds = 2\pi\,\chi(S).}$$



Теорема (разложение Ходжа)

Пусть $\Delta : \Lambda^k(M) \to \Lambda^k(M)$ - оператор Лапласа, и пусть $H^k(M) = \ker \Delta$. Тогда

$$\boxed{\Lambda^k(M) = d\left(\Lambda^{k-1}(M)\right) \oplus \delta\left(\Lambda^{k+1}(M)\right) \oplus H^k(M).}$$

Правильные определения:

(M, g) - риманово мног-е

1) $\star 1 = \mathrm{vol}_g$; $\star \mathrm{vol}_g = 1$; $\omega = \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$

$\star \omega = \sqrt{|\det(g)|} \sum (-1)^{\varepsilon} \omega^{j_1 \ldots j_k} dx_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n}$, где

$\omega^{j_1 \ldots j_k} = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}$

$(-1)^{\varepsilon} = \delta^{1 \ldots k}_{j_1 \ldots j_k} = \begin{cases} -1, & \text{если } (j_1, \ldots, j_k) \text{ - нечетная перест. } (1, \ldots, k) \\ +1, & \text{четная} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Т.е. $\star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = \sqrt{|\det G|}\left(dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n\right).$

Св-ва: $\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega.$

2) $\delta = (-1)^{nk+1} \star d \star$ и тогда $\langle \alpha, \beta \rangle = \int \alpha \wedge \star\beta$ и $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$

3) Тогда $\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$ и $\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$

$\langle \Delta\omega, \omega \rangle \geq 0.$