# Лекция 12. Лапласиан

(Введение)

① Итак, пусть $M$ — гладкое мн-е (возможно, с краем $\partial M$)

Тогда $\dim T_xM = n$; $T_xM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$

$T_x^*M = \langle dx_1, \ldots, dx_n \rangle$.

$k$-формы на $M$: $\Lambda^k(M) = \left\{ \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} \right\}$.

$\dim \Lambda^k(M) = C_n^k$.

$\Lambda^0(M) \cong C^\infty(M)$; $\Lambda^1(M) \cong T^*M$.

<u>Дифференциал</u> $d: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ $\left( \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} d\omega_{j_1 \ldots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} \right)$

Кодифф: $\delta: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$; $\boxed{\delta := \star d \star}$, где $\star: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$ (звезда Ходжа)

(скорее для $\nabla$)

<u>Упр. 1</u> Док-ть, что $d \circ d = 0$ и $\delta \circ \delta = 0$. [На $(M, g)$ $\star$ и $\delta$ задаются немного иначе]

---

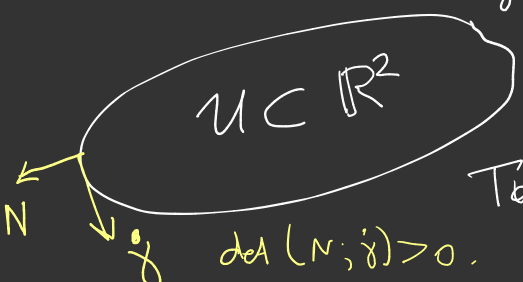
**Теор. (Стокса)** Пусть $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ (supp $\omega$ компакт), где $M$ — ориентируемое $n$-мерное мн-е с краем $\partial M$ (ориентация на $\partial M$ согласована с $M$).

Тогда $$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

---

**Следствие 1 (формула Грина)**

$\partial U = \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ гладкая (регул.) кривая.



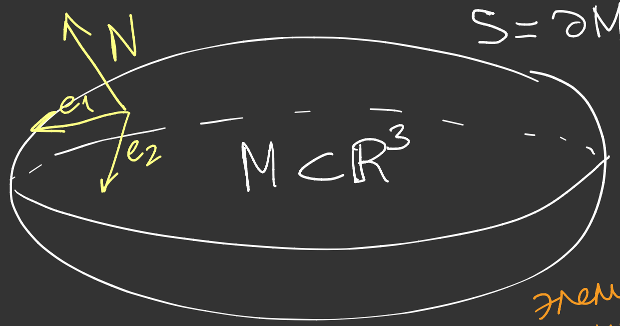

$\det(N; \dot\gamma) > 0$.

Пусть $V = (P(x,y), Q(x,y))$ — гладкое вект. поле на $\overline{U}$

Тогда $$\oint_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int_a^b \left[ P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt = \int_a^b \langle V(t); \gamma'(t) \rangle\, dt$$

$$\int_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

## Следствие 2 (формула Гаусса–Остроградского)




$V=(V_1,V_2,V_3)$ – вект. поле на $M$

$$\operatorname{div} V=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial V_j}{\partial x_j}=\operatorname{tr}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=\operatorname{tr} J_x(V)$$

элемент площади, элемент объема:

$$\int_S \langle V,N\rangle\, dA=\int_M \operatorname{div} V\, dv$$

$(M,g)$ с краем $\partial M$ $\quad(\partial M, g_1)$

$\mathrm{vol}_M=\mathrm{vol}_g$

$\mathrm{vol}_{\partial M}=\mathrm{vol}_S=\mathrm{vol}_{g_1}$

$\mathrm{vol}_g=\sqrt{\det g}\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$

$$\boxed{\int_{\partial M}\langle V,N\rangle\, \mathrm{vol}_S=\int_M \operatorname{div} V\, \mathrm{vol}_M}$$

## Следствие 3 (формула Стокса для пов-тей).

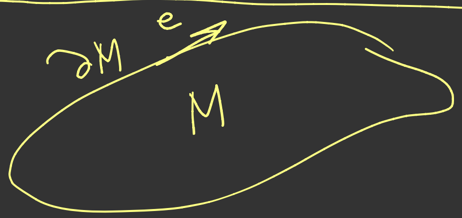
$V=(V_1(x_1,x_2,x_3),V_2,V_3)$ – вект. поле в $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot} V=\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3};\ \ldots;\ \ldots\right)$$

Пусть $M=f(U)\subset\mathbb{R}^3$ – (компактная) гл. рег. пов-ть; $N=\dfrac{[f_{u_1}\times f_{u_2}]}{\|[f_{u_1}\times f_{u_2}]\|}$

$$\boxed{\int_M\langle \operatorname{rot} V,N\rangle\, \underbrace{\mathrm{vol}_M}_{du_1\wedge du_2}=\int_{\partial M}\langle V,e\rangle\, \mathrm{vol}_{\partial M}}$$

(сводится к $\int dt$) $\quad \| \sqrt{\det(g)}$



## ② Римановы многообр-я и Лапласиан

$(M,g)$ — рим. мн-е (возм. с $\partial M$), где $\boxed{g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j}$

$vol_g = \sqrt{\det(g)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ $\qquad g = (g_{ij}) > 0$

Звезда Ходжа: $\quad (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) \wedge \star (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = vol_g$

1) $\star 1 = vol_g$

2) $\star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = \sqrt{\det(g)}\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$

3) $\star^{-1}(dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n) = \dfrac{(-1)^{?}}{\sqrt{\det(g)}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$

4) $\star\star(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ $\quad$ (?!) $\quad \boxed{\star\star\omega = \omega}$

Кодифф-л: $\quad \delta = \star^{-1} d \star \quad ; \quad \delta : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$

1) $\delta \circ \delta = 0$

2) $f \in C^\infty(M)$, то $\delta f = 0$.

Скалярное произведение

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(M)$. Тогда

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_M \omega_1 \wedge (\star \omega_2)$$

Теор. Пусть $M$ — многообр-е без края; $\alpha \in \Lambda^k(M)$, $\beta \in \Lambda^{k+1}(M)$.

Тогда $\quad \langle d\alpha, \beta \rangle = (-1)^{k+1} \langle \alpha, \delta\beta \rangle$ $\quad$ (для "старой" $\star$ Ходжа $(-1)^{nk+1}$, т.к. $\star\star\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$)

Док-во: $\langle \alpha, \delta\beta \rangle = \langle \alpha, \star^{-1} d \star \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \star\star^{-1} d \star\beta = \int_M \alpha \wedge d\star\beta$

$$d(\underbrace{\alpha}_{k} \wedge \underbrace{\star\beta}_{n-k-1}) = \underbrace{d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\star\beta)}_{n\text{-форма}}$$

По теор. Стокса

$$\int_M d(\alpha\wedge *\beta) = \int_{\partial M = \varnothing} \alpha\wedge *\beta = 0$$

Следовательно,

$$\int_M d\alpha\wedge *\beta + (-1)^k \underbrace{\int_M \alpha\wedge d*\beta}_{} = 0$$

$$\langle d\alpha,\beta\rangle = \int_M d\alpha\wedge *\beta = (-1)^{k+1}\langle\alpha,\delta\beta\rangle \quad \boxed{}$$

(Laplace – de Rham operator)

Лапласиан: Пусть $\omega\in\Lambda^k(M)$. Тогда

$$\Delta\omega := (d+\delta)^2 = d\delta+\delta d.$$

Теор.

1) $\langle\Delta\omega_1,\omega_2\rangle = \langle\omega_1,\Delta\omega_2\rangle$ (самосопряж).

2) $\langle\Delta\omega,\omega\rangle \overset{?}{\geq} 0$

3) Пусть $f\in C^\infty(M)$. Тогда $\Delta f = \delta d f \overset{?}{=} -\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}(f)$

(классический лапласиан для ф-ций).

В частности, для $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$