Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция ∞: Laplacian Smoothing / Лапласиан

Богачев Николай Владимирович

28 ноября 2020 года

Skoltech & MIPT

Оператор Лапласа

Пусть M – гладкое многообразие. Напоминаем, что оператор Лапласа на пространстве $\Lambda^k(M)$ задается формулой $\Delta \coloneqq \mathrm{d}\,\delta + \delta d$, где $\delta \coloneqq (-1)^{nk+1} \star d \star$ – кодифференциал, а $\star\colon \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$, $(n = \dim M)$ – звезда Ходжа.

Проверьте, что при $k = 0$ и $M = \mathbb{R}^n$ это определение даст

стандартную формулу Лапласиана: $\Delta\varphi = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$.

Скалярное произведение: $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \star \beta$.

Можно проверить, что $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle$.

Свойства Лапласиана

Положительная полуопределенность: $(\Delta u, u) \geq 0$.

Симметричность: $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$.

Если $\Delta u = 0$ для ограниченной $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то $u \equiv const$.

Если $\Delta u = 0$ для $u \in C^2(U \subset \mathbb{R}^n)$, то локальный экстремум достигается в граничных точках ∂U.

Если $M = f(U) \subset \mathbb{R}^3$, то $\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3) = 2H \cdot \overrightarrow{N}$, где H – средняя кривизна поверхности, $\overrightarrow{N}$ – ее вектор главной нормали.

Дискретный Лапласиан

Пусть $M = \{V, E, F\} \subset \mathbb{R}^3$– симплициальная поверхность.

Дискретный Лапласиан L рассматриваем на вершинах:

$L(v_j) = (L(v_{jx}), L(v_{jy}), L(v_{jz}))$, где $v_j = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})$ – набор координат вершины $v_j \in V$.

Имеем: $L(v_j) = \left(L(v_{jx}), L(v_{jy}), L(v_{jz})\right) = (\delta_{jx}, \delta_{jy}, \delta_{jz}) = \delta_j$.

Общий вид Лапласиана: $L(v_j) = \sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij}(v_i - v_j)$, где $\sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} = 1$.

Типы дискретизации Лапласиана

Что хотим от дискретизации? Как всегда, всякие свойства..

- Однородная/средняя дискретизация: $\omega_{ij} = \frac{1}{|E|}$.
- Через внешние формы:

$$(\Delta f)_j = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Area}(v_j^*)} \cdot \sum_i (ctg\, \alpha_{ij} + ctg\, \beta_{ij}) \left(f(v_i) - f(v_j) \right).$$

- Через конечный набор собственных функций.

Приложения: сглаживание

Нетрудно заметить, что $L(v) \in \operatorname{conv}\{v' \mid (v, v') \in E\}$.

Применяем Лапласиан к вершинам сетки:

Приложения: деформация и метод якорей

Для более сложных деформаций – метод якорей. Якоря – это опорные точки, координаты которых зафиксированы. Остальные меняются так, чтобы деформация была «гладкой».

Пусть $V = (v_1, \dots, v_n)$ – матрица векторов вершин сетки в $\mathbb{R}^3$, а L – матрица Лапласиана, где $L_{ij} = -1$ при $i = j$, $L_{ij} = \omega_{ij}$, если $(i, j) \in E$, и $L_{ij} = 0$ иначе.

Приложения: деформация и метод якорей

Таким образом, $LV = \Delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ – матрица значений Лапласиана на вершинах сетки.

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{v_x} = \boldsymbol{\delta_x}$$

Зафиксируем значения $v'_1, \dots, v'_m$.

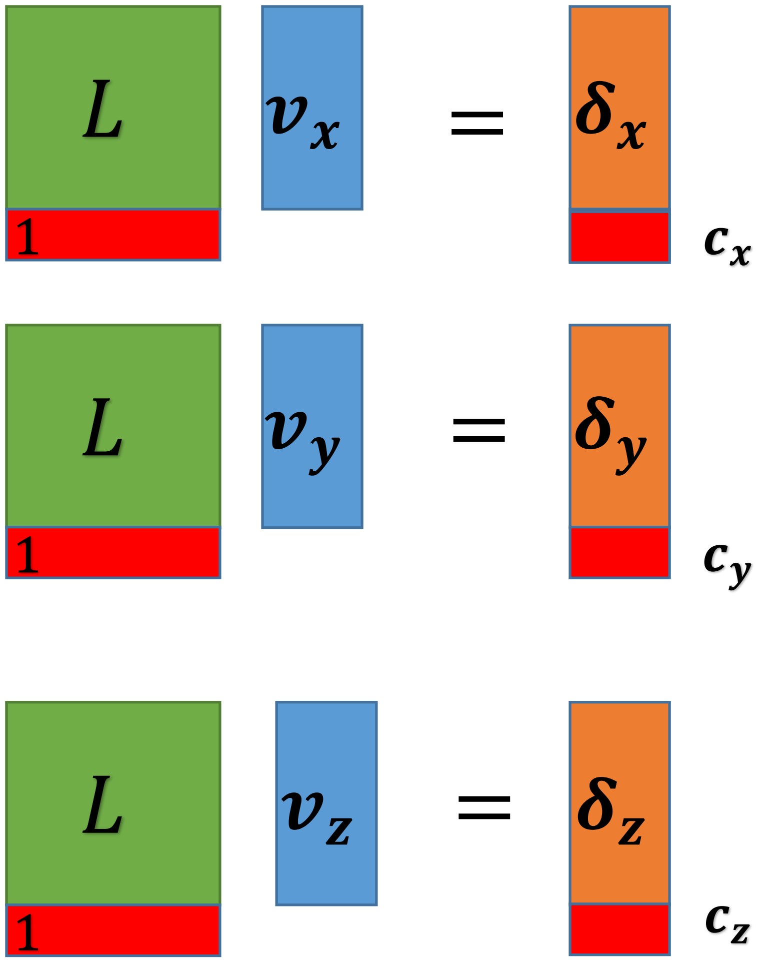
$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{v_y} = \boldsymbol{\delta_y}$$

Как должны измениться остальные вершины?

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{v_z} = \boldsymbol{\delta_z}$$

Приложения: деформация и метод якорей

Как должны измениться остальные вершины?



Минимизируем квадратичную энергию:

$$\tilde{x} = \arg\min\left(|Lx - \delta_x|^2 + \sum_{s}^{m} |x_s - c_s|^2\right)$$

Сводится к решению системы $Ax = b$:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$