КРИВЫЕ

Это краткий конспект к курсу ГКП[1], в процессе создания. Вопросы по конспекту пишите А.Перепечко[2].

1.. **Гладкие кривые.** *(Параметризованная) кривая* - это дифференцируемое отображение γ из $\mathbb{R}^1$ (или его открытого подмножества) в $\mathbb{R}^n$. Его производная называется *вектором скорости* γ'.

Также кривые можно задавать *неявно*, без параметризации - уравнением или системой уравнений на координаты.

Кривая называется *гладкой* или *регулярной*, если вектор скорости нигде не обращается в ноль. *Единичный касательный вектор* (сонаправленный с вектором скорости) обозначается через $T = \gamma'/|\gamma'|$.

Замена параметра - отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, новая параметризация получается композицией с γ. Параметризация называется *натуральной*, если $|\gamma'| = 1$ всюду; она обозначается через $\gamma(s)$, а производные - точками $\dot{\gamma}$.

Длина кривой вычисляется по формуле $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Какие формулы получаются для

1. плоской кривой?
2. пространственной кривой?
3. кривой-графика $y = f(x)$?
4. натуральной параметризации?

1..1. *Репер Френе.* Каждому аргументу $t \in \mathbb{R}$ сопоставляется положительно ориентированный ортонормированный репер в точке $\gamma(t)$, в некотором смысле согласованный с производными. Состоит из T, *нормали* N и (в трёхмерном случае) *бинормали* B.

1. Для плоских кривых репер T, N однозначно восстанавливается по T, и нормаль N в натуральной параметризации паралельна $\ddot{\gamma}$ (но может быть противонаправлена).
2. Для пространственных кривых нормаль определяется через $N = \ddot{\gamma}/||\ddot{\gamma}||$ и по возможности гладко достраивается в точках с $\ddot{\gamma} = 0$. Иначе говоря, T, N - ортонормированный базис плоскости $\langle \gamma', \gamma'' \rangle$, имеющий ту же ориентацию, что и γ', γ''. Эта плоскость называется *соприкасающейся*.
3. Бинормаль B однозначно восстанавливается по T, N.

Кривизна κ определяется из $\ddot{\gamma} = \kappa N$. Для пространственных кривых она неотрицательна. Неформально: кривизна показывает, насколько быстро кривая отклоняется от касательной.

Радиус кривизны $R = 1/|\kappa|$. *Соприкасающаяся окружность* имеет радиус R, касается кривой и лежит в соприкасающейся плоскости по правильную сторону от кривой. Это единственная окружность, имеющая касание второго порядка.

Кручение τ пространственной кривой определяется в натуральной параметризации как

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma})}{\kappa^2},$$

где в числителе смешанное произведение, то есть ориентированный объём натянутого на вектора параллелепипеда. Неформально: кручение показывает, насколько быстро кривая отклоняется от соприкасающейся плоскости.

1..2. *полезные формулы.*

1..3. *интересные факты (теоремы).* Плоская (соотв. пространственная) кривая однозначно, с точностью до движения, определяется функцией кривизны (соотв. кривизны и кручения).

Полная кривизна (интеграл кривизны по прямой) принимает дискретный набор значений для замкнутых плоских кривых. Какой?

---

[1] <https://nvbogachev.netlify.app/teaching/gcs20f/>

[2] <mailto:a@perep.ru>

2.. **Дискретные кривые.** *Дискретная кривая* - это ломаная, то есть набор последовательно соединённых точек пространства.

Способы задать *кривизну* в i-й вершине плоской дискретной прямой $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$:

1. Угол поворота от $\overrightarrow{\gamma_{i-1}\gamma_i}$ к $\overrightarrow{\gamma_i\gamma_{i+1}}$.
2. Через соприкасающуюся окружность, описанную вокруг $\gamma_{i-1}\gamma_i\gamma_{i+1}$.
3. Изменение длины при шевелении вершины. Строго - модуль градиента длины от координат γ_i.
4. По формуле Штейнера (три варианта): параллельный перенос рёбер + три варианта соединительной шапочки (продолжение рёбер, соединение отрезком, соединение дугой).