# Геометрия дискретных поверхностей

**ГКП-6, упр.1.** Докажите, что

(1) площадь сферического треугольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равна $\sum \alpha_i - \pi$.

(2) Докажите, что площадь сферического $n$-угольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_i + (2-n)\pi$.

**ГКП-6, упр.2.** Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная симплициальная поверхность без края. Для данной вершины $v$ рассмотрим единичные нормали $n_1, \ldots, n_k$ к содержащим её граням. Определим гауссову кривизну $K(v)$ в точке $v$ как площадь сферического многоугольника, натянутого на концы векторов $n_1, \ldots, n_k$, а также определим угловой дефект по формуле $d(v) = 2\pi - \sum_{f \in F_v} \angle_f(v)$, где $F_v$ — это все грани, содержащие вершину $v$, а $\angle_f(v)$ — плоский угол грани $f$ при вершине $v$. Докажите, что $d(v) = K(v)$ для всех вершин $v$.

**ГКП-6, упр.3.** (Дискретная теорема Гаусса-Бонне)

(1) Для произвольного выпуклого многогранника докажите, что

$$\sum_{v \in V} d(v) = 4\pi.$$

(2) Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная ориентированная симплициальная поверхность без края. Докажите, что $\sum_{v \in V} d(v) = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$ — Эйлерова характеристика симплициальной поверхности $M$.

**ГКП-6, упр.4.** Площадь $S$ треугольника $ABC$ на плоскости зависит от расположения точек $A$, $B$ и $C$. Докажите, что градиент $S$ как функции от $A$ — это вектор $\nabla_A S$, перпендикулярный стороне $BC$, а по длине равный половине $BC$.

**ГКП-6, упр.5.** Рассмотрим объём Vol многогранника как функцию от положения вершины $v$. Докажите, что

$$\nabla_v \mathrm{Vol} = \frac{1}{3} \sum_i A_i N_i,$$

где $A_i$ и $N_i$ — соответственно площади и нормали граней, содержащих $v$.

**ГКП-6, упр.6.** Рассмотрим площадь $S$ симплициальной поверхности как функцию от положения вершины $v$. Докажите, что

$$\nabla_v S = \frac{1}{2} \sum_i (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i)(v_i - v),$$

где $v_i$ — вершины, смежные с данной, а $\alpha_i, \beta_i$ — углы, противолежащие ребру $vv_i$.

## Геометрия дискретных поверхностей

**ГКП-6, упр.1.** Докажите, что

(1) площадь сферического треугольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равна $\sum \alpha_i - \pi$.

(2) Докажите, что площадь сферического $n$-угольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_i + (2-n)\pi$.

**ГКП-6, упр.2.** Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная симплициальная поверхность без края. Для данной вершины $v$ рассмотрим единичные нормали $n_1, \ldots, n_k$ к содержащим её граням. Определим гауссову кривизну $K(v)$ в точке $v$ как площадь сферического многоугольника, натянутого на концы векторов $n_1, \ldots, n_k$, а также определим угловой дефект по формуле $d(v) = 2\pi - \sum_{f \in F_v} \angle_f(v)$, где $F_v$ — это все грани, содержащие вершину $v$, а $\angle_f(v)$ — плоский угол грани $f$ при вершине $v$. Докажите, что $d(v) = K(v)$ для всех вершин $v$.

**ГКП-6, упр.3.** (Дискретная теорема Гаусса-Бонне)

(1) Для произвольного выпуклого многогранника докажите, что

$$\sum_{v \in V} d(v) = 4\pi.$$

(2) Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная ориентированная симплициальная поверхность без края. Докажите, что $\sum_{v \in V} d(v) = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$ — Эйлерова характеристика симплициальной поверхности $M$.

**ГКП-6, упр.4.** Площадь $S$ треугольника $ABC$ на плоскости зависит от расположения точек $A$, $B$ и $C$. Докажите, что градиент $S$ как функции от $A$ — это вектор $\nabla_A S$, перпендикулярный стороне $BC$, а по длине равный половине $BC$.

**ГКП-6, упр.5.** Рассмотрим объём Vol многогранника как функцию от положения вершины $v$. Докажите, что

$$\nabla_v \mathrm{Vol} = \frac{1}{3} \sum_i A_i N_i,$$

где $A_i$ и $N_i$ — соответственно площади и нормали граней, содержащих $v$.

**ГКП-6, упр.6.** Рассмотрим площадь $S$ симплициальной поверхности как функцию от положения вершины $v$. Докажите, что

$$\nabla_v S = \frac{1}{2} \sum_i (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i)(v_i - v),$$

где $v_i$ — вершины, смежные с данной, а $\alpha_i, \beta_i$ — углы, противолежащие ребру $vv_i$.