Топология гладких многообразий

ГКП-4, упр.1. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

ГКП-4, упр.2. Гомеоморфны ли окружность и граница треугольника?

ГКП-4, упр.3*. Рассмотрим буквы T, X, L и E как топологические пространства. Какие из них гомеоморфны друг другу?

ГКП-4, упр.4*. Докажите, что если X компактно, то любое взаимно-однозначное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, где Y — хаусдорфово.

ГКП-4, упр.5. Проверьте, что открытый единичный круг $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ гомеоморфен плоскости.

ГКП-4, упр.6. Приведите пример непрерывного биективного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

ГКП-4, упр.7. Какое минимальное число карт нужно, чтобы покрыть сферу?

ГКП-4, упр.8. Докажите, что сфера и тор не гомеоморфны.

Топология дискретных поверхностей

(Геометрический) *симплициальный комплекс* — это такой набор симплексов в $\mathbb{R}^n$, что грань каждого симплекса тоже входит в этот набор и пересечение любых двух симплексов является гранью каждого из них.

Симплициальным многообразием называется симплициальный комплекс, у которого звезда каждой вершины (то есть совокупность всех симплексов, содержащих её) гомеоморфна шару. Поверхностью мы называем двумерное многообразие.

Вершина называется *регулярной*, если её степень равна шести. Отклонение от шести называется *дефектом* вершины.

ГКП-4, упр.9. Пусть L и M являются подкомплексами симплициального комплекса K. Докажите, что $L \cap M$ и $L \cup M$ также являются таковыми.

ГКП-4, упр.10. Постройте симплициальную поверхность, гомеоморфную

(а) сфере $\mathbb{S}^2$;
(б) тору $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

ГКП-4, упр.11. Для выпуклого многогранника, у которого V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера*: $V - E + F = 2$.

ГКП-4, упр.12*. Для симплициальной поверхности (ориентируемой, без края) с g ручками, у которой V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера–Пуанкаре*: $V - E + F = 2 - 2g$.

ГКП-4, упр.13. Докажите, что если каждая вершина симплициальной поверхности (связной, ориентируемой, без края) регулярна, то эта поверхность — тор, т.е. $g = 1$.

ГКП-4, упр.14*. Докажите, что при $g = 0$ есть хотя бы четыре нерегулярные вершины.

ГКП-4, упр.15. Докажите, что *средняя* степень вершин стремится к 6 при увеличении числа вершин в триангуляции поверхности.

ГКП-4, упр.16*. Покажите, что не существует триангуляции тора ровно с двумя дефектными вершинами, дефекты которых — ± 1.

Топология гладких многообразий

ГКП-4, упр.1. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

ГКП-4, упр.2. Гомеоморфны ли окружность и граница треугольника?

ГКП-4, упр.3*. Рассмотрим буквы T, X, L и E как топологические пространства. Какие из них гомеоморфны друг другу?

ГКП-4, упр.4*. Докажите, что если X компактно, то любое взаимнооднозначное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, где Y — хаусдорфово.

ГКП-4, упр.5. Проверьте, что открытый единичный круг $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ гомеоморфен плоскости.

ГКП-4, упр.6. Приведите пример непрерывного биективного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

ГКП-4, упр.7. Какое минимальное число карт нужно, чтобы покрыть сферу?

ГКП-4, упр.8. Докажите, что сфера и тор не гомеоморфны.

Топология дискретных поверхностей

(Геометрический) *симплициальный комплекс* — это такой набор симплексов в $\mathbb{R}^n$, что грань каждого симплекса тоже входит в этот набор и пересечение любых двух симплексов является гранью каждого из них.

Симплициальным многообразием называется симплициальный комплекс, у которого звезда каждой вершины (то есть совокупность всех симплексов, содержащих её) гомеоморфна шару. Поверхностью мы называем двумерное многообразие.

Вершина называется *регулярной*, если её степень равна шести. Отклонение от шести называется *дефектом* вершины.

ГКП-4, упр.9. Пусть L и M являются подкомплексами симплициального комплекса K. Докажите, что $L \cap M$ и $L \cup M$ также являются таковыми.

ГКП-4, упр.10. Постройте симплициальную поверхность, гомеоморфную

(а) сфере $\mathbb{S}^2$;

(б) тору $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

ГКП-4, упр.11. Для выпуклого многогранника, у которого V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера*: $V - E + F = 2$.

ГКП-4, упр.12*. Для симплициальной поверхности (ориентируемой, без края) с g ручками, у которой V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера–Пуанкаре*: $V - E + F = 2 - 2g$.

ГКП-4, упр.13. Докажите, что если каждая вершина симплициальной поверхности (связной, ориентируемой, без края) регулярна, то эта поверхность — тор, т.е. $g = 1$.

ГКП-4, упр.14*. Докажите, что при $g = 0$ есть хотя бы четыре нерегулярные вершины.

ГКП-4, упр.15. Докажите, что *средняя* степень вершин стремится к 6 при увеличении числа вершин в триангуляции поверхности.

ГКП-4, упр.16*. Покажите, что не существует триангуляции тора ровно с двумя дефектными вершинами, дефекты которых — ± 1.