Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f\colon U \to M$. *Оператор формы* $S\colon \mathrm{T}_pU \to \mathrm{T}_pU$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = d\mathrm{N}(X)$. *Главные* кривизны k_1, k_2 и направления — это собственные значения и векторы S. *Гауссова* кривизна $\mathrm{K} = k_1k_2$, *средняя* кривизна $\mathrm{H} = k_1 + k_2$.

ГКП-3, упр.1. Возьмите в качестве M либо сферу

$$f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$

либо тор

$$f(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

Вычислите главные кривизны и направления M в точке $f(0,0)$.

ГКП-3, упр.2. Докажите, что $\mathrm{H}^2 \geq 4\mathrm{K}$. Когда достигается равенство?

ГКП-3, упр.3*. Вторая квадратичная форма определяется через

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -g(SX,Y) = -d\mathrm{N}(X)\cdot df(Y).$$

Выразите её в координатах. Докажите, что $k_n(X) = \frac{\mathrm{I\!I}(X,X)}{g(X,X)}$.

ГКП-3, упр.4. Докажите, что для кривизны нормального сечения верно

$$k_n(X) := \frac{\langle df(X), dN(X)\rangle}{\langle df(X), df(X)\rangle}$$

ГКП-3, упр.5. Вторая квадратичная форма определяется по формуле

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -\langle SX, Y\rangle = -\langle d\mathrm{N}(X), df(Y)\rangle.$$

Докажите, что матрица $\mathrm{I\!I}$ квадратичной формы имеет вид:

$$\mathrm{I\!I} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{N}, f_{uu}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle \\ \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{vv}\rangle \end{pmatrix}.$$

ГКП-3, упр.6. Докажите, что $\langle SX, Y\rangle = \langle X, SY\rangle$.

ГКП-3, упр.7. Докажите, что главные направления ортогональны.

ГКП-3, упр.8. Пусть e_1 и e_2 — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные в некоторой точке двумерной гиперповерхности. Докажите, что $\mathrm{H} = \mathrm{I\!I}(e_1,e_1) + \mathrm{I\!I}(e_2,e_2)$.

ГКП-3, упр.9. (Формула Эйлера). Пусть T — единичный касательный вектор на поверхности, и пусть $\theta_j = \angle(T, X_j)$. Докажите, что $k_n(T) = k_1\cos^2\theta_1 + k_2\cos^2\theta_2$.

ГКП-3, упр.10*. (Теорема Менье). Пусть T — вектор скорости кривой μ на поверхности M. Пусть N_μ — вектор главной нормали к μ, $\theta = \angle(N, N_\mu)$. Тогда

$$k_n(T) = k_\mu\cos\theta = \frac{\mathrm{I\!I}(T,T)}{\langle T,T\rangle}.$$

ГКП-3, упр.11*. Пусть две двумерные гиперповерхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ. Пусть k — кривизна γ, k_j — нормальные кривизны вдоль γ в M_j, а θ — угол между нормалями к M_1 и M_2. Докажите, что

$$k^2\sin^2\theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\theta.$$

ГКП-3, упр.12*. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — нормальные кривизны двумерной гиперповерхности в направлениях, разбивающих касательную плоскость на углы π/m. Докажите, что

$$\frac{k_1 + \ldots + k_m}{m} = \frac{H}{2}.$$

Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f\colon U \to M$. *Оператор формы* $S\colon \mathrm{T}_pU \to \mathrm{T}_pU$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = d\mathrm{N}(X)$. *Главные* кривизны k_1, k_2 и направления — это собственные значения и векторы S. *Гауссова* кривизна $\mathrm{K} = k_1k_2$, *средняя* кривизна $\mathrm{H} = k_1 + k_2$.

ГКП-3, упр.1. Возьмите в качестве M либо сферу

$$f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u),$$

либо тор

$$f(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

Вычислите главные кривизны и направления M в точке $f(0,0)$.

ГКП-3, упр.2. Докажите, что $\mathrm{H}^2 \geq 4\mathrm{K}$. Когда достигается равенство?

ГКП-3, упр.3*. Вторая квадратичная форма определяется через

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -g(SX,Y) = -d\mathrm{N}(X)\cdot df(Y).$$

Выразите её в координатах. Докажите, что $k_n(X) = \frac{\mathrm{I\!I}(X,X)}{g(X,X)}$.

ГКП-3, упр.4. Докажите, что для кривизны нормального сечения верно

$$k_n(X) := \frac{\langle df(X), dN(X)\rangle}{\langle df(X), df(X)\rangle}$$

ГКП-3, упр.5. Вторая квадратичная форма определяется по формуле

$$\mathrm{I\!I}(X,Y) := -\langle SX, Y\rangle = -\langle d\mathrm{N}(X), df(Y)\rangle.$$

Докажите, что матрица $\mathrm{I\!I}$ квадратичной формы имеет вид:

$$\mathrm{I\!I} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{N}, f_{uu}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle \\ \langle \mathrm{N}, f_{uv}\rangle & \langle \mathrm{N}, f_{vv}\rangle \end{pmatrix}.$$

ГКП-3, упр.6. Докажите, что $\langle SX, Y\rangle = \langle X, SY\rangle$.

ГКП-3, упр.7. Докажите, что главные направления ортогональны.

ГКП-3, упр.8. Пусть e_1 и e_2 — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные в некоторой точке двумерной гиперповерхности. Докажите, что $\mathrm{H} = \mathrm{I\!I}(e_1,e_1) + \mathrm{I\!I}(e_2,e_2)$.

ГКП-3, упр.9. (Формула Эйлера). Пусть T — единичный касательный вектор на поверхности, и пусть $\theta_j = \angle(T, X_j)$. Докажите, что $k_n(T) = k_1\cos^2\theta_1 + k_2\cos^2\theta_2$.

ГКП-3, упр.10*. (Теорема Менье). Пусть T — вектор скорости кривой μ на поверхности M. Пусть N_μ — вектор главной нормали к μ, $\theta = \angle(N, N_\mu)$. Тогда

$$k_n(T) = k_\mu\cos\theta = \frac{\mathrm{I\!I}(T,T)}{\langle T,T\rangle}.$$

ГКП-3, упр.11*. Пусть две двумерные гиперповерхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ. Пусть k — кривизна γ, k_j — нормальные кривизны вдоль γ в M_j, а θ — угол между нормалями к M_1 и M_2. Докажите, что

$$k^2\sin^2\theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\theta.$$

ГКП-3, упр.12*. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — нормальные кривизны двумерной гиперповерхности в направлениях, разбивающих касательную плоскость на углы π/m. Докажите, что

$$\frac{k_1 + \ldots + k_m}{m} = \frac{H}{2}.$$