

Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 7

I Введение (было)

II Топология (была)

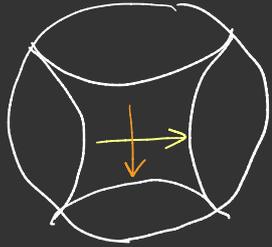
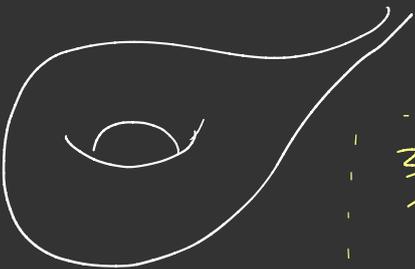
III Риманова геометрия (была)

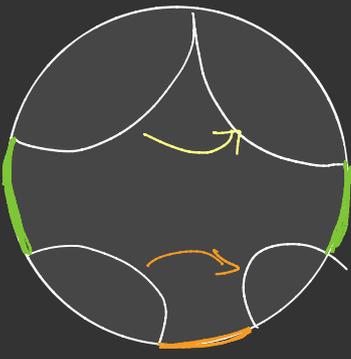
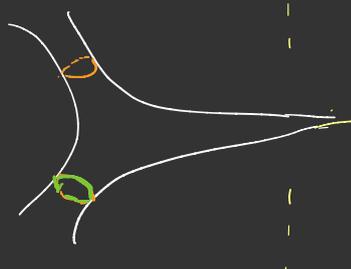
IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли.

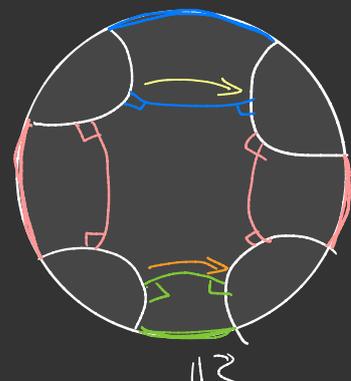
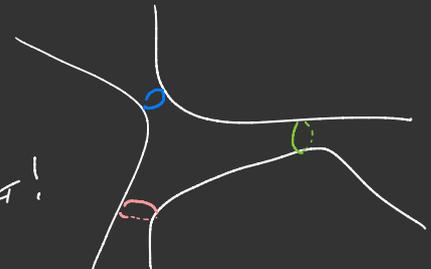
V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды.

Группы отражений. Решетки в $Isom(E^n), Aff(\mathbb{R}^n)$:

Ⓘ Примеры гиперболических поверхностей

1)  \cong 

2)  \cong 

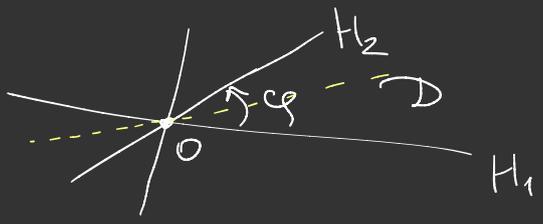
3)  \cong 

$\pi_1(S) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$

Можно рассм. $C_\Gamma = \text{Conv Hull}(\Lambda_\Gamma)$,
Тогда $\Gamma \backslash \mathbb{R}C_\Gamma$ и в данном случае C_Γ/Γ - компакт!
prop. discontin. Convex cocompact action

② Группы отражений — простейшие примеры

1) Рассмотрим $\Gamma = \langle R_{H_1}, R_{H_2} \rangle$. Тогда $R_{H_2} \circ R_{H_1} = Rot_0^{2\varphi}$, где



$\varphi = \angle(H_1, H_2)$. Если Γ -дискр. и

$D = H_1^- \cap H_2^-$ - функ. конус для Γ , то

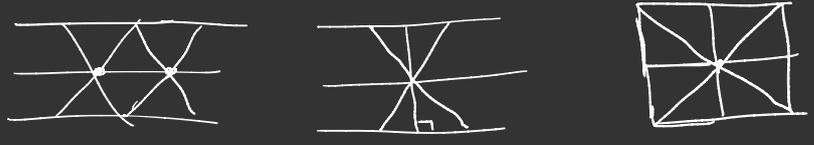
$(Rot_0^{2\varphi})^k = Id$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{k}$.

(Иначе найдется стр-е, которое разрешает D).

Следовательно, группу многоугольников для дискр. групп, порожд. отражениями, и метки углы вида $\frac{\pi}{k}$ — **многоугольники Кокстера**.

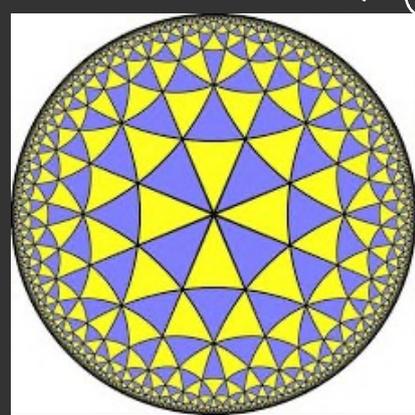
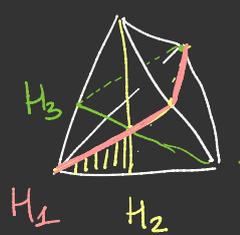
2) Треугольники Кокстера.

E^2 : $\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} = \pi \Rightarrow (k, l, m) = (2, 4, 4), (2, 3, 6), (3, 3, 3)$

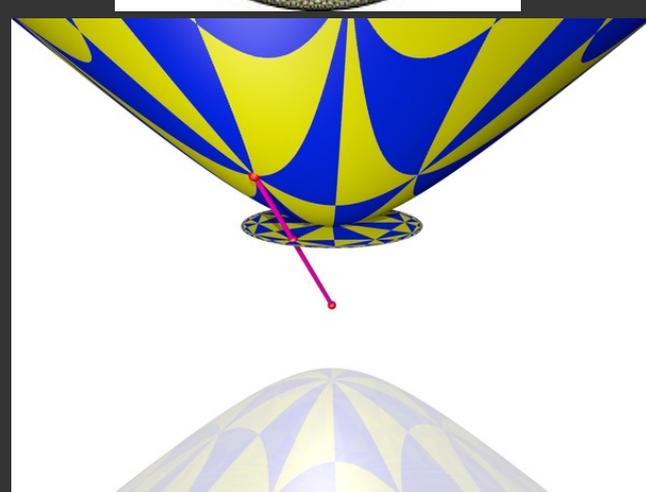
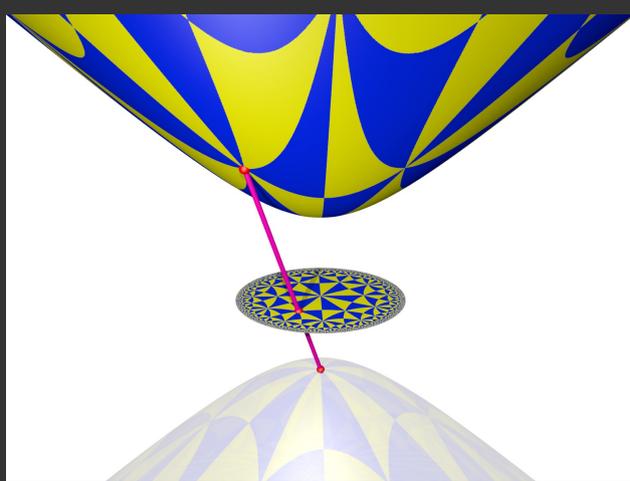


S^2 : $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1 \Rightarrow (k, l, m) = (2, 2, m), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$

↑ тетраэдр
↑ куб
↑ октаэдр
↑ додекаэдр
↑ икосаэдр



H^2 : $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$ — бескон. много.



3) Модулярная группа Клейна $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим группу $PSL_2(\mathbb{R}) = Isom^+(H^2)$. Она состоит из преобразований $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc=1$. (собств. - сохр. ориентацию) (S)

Группа $Isom(H^2) = PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \tau \rangle$ содержит также и несобств. движения (меняющие ориентацию) вида

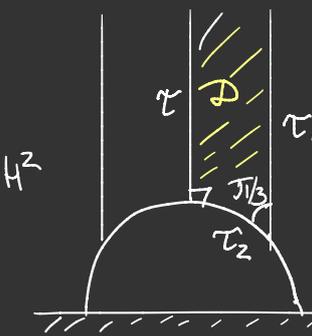
$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = -1$. (Нан., что $H^2 = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$
(N) $\partial H^2 := S^1 = \{z | Im(z) = 0\} \cup \infty = \mathbb{R} \cup \infty$)

Выше τ общ. отражение $\tau(z) = -\bar{z}$ отн. прямой $\{Re(z) = 0\}$

Далее, рассмотрим модулярную группу Клейна $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ и расширенную группу $\hat{\Gamma} = \Gamma \rtimes \langle \tau \rangle$. Группа Γ состоит из движений вида (S) с $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, а группа $\hat{\Gamma}$ также содержит все движения (N) с коэфф. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Несложно доказать, что $\hat{\Gamma}$ действ. равна $\Gamma \rtimes \langle \tau \rangle$, а также, что Γ и $\hat{\Gamma}$ явл. дискретными.

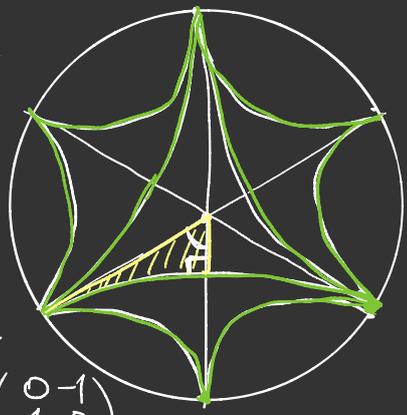
Группа $\hat{\Gamma}$ содержит отражения $\tau: z \mapsto -\bar{z}$ отн. $\{Re(z) = 0\}$,

$\tau_1: z \mapsto 1 - \bar{z}$ отн. прямой $\{Re(z) = 1/2\}$ и $\tau_2: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ отн. $\{|z|=1\}$ (инверсия)



Эти прямые ограничивают треугольник

$D = \Delta(\pi/2, \pi/3, 0) \subset H^2$. Он же в модели Пуанкаре в диске B^2 :



Заметим, что $\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Далее, $\tau_1 \circ \tau(z) = 1+z \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\tau_2 \circ \tau(z) = -1/\bar{z} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

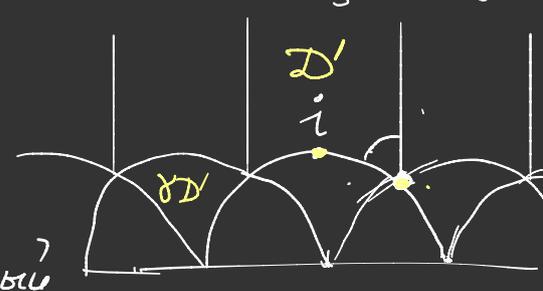
Эти матрицы являются целочисл. элементами преобразованиями строк и столбцов. Можно проверить, что всякую матрицу из $SL_2(\mathbb{Z})$ можно таким образом привести к $\pm I$. Следовательно, она

представима в виде слова из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$. Значит,

Γ порождается отражениями τ, τ_1, τ_2 относит. сторон \mathcal{D} .

Отсюда получаем, что функ. обл. для группы $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ есть треугольник $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \tau(\mathcal{D})$, причем Γ порождается

центр. симм. $\tau_0 \tau_2$ с центром в $\tau \cdot i$ и поворотом $\tau_2 \tau_1$ на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Можно доказать, что между этими элементами нет соотношений. (метод Пуанкаре)



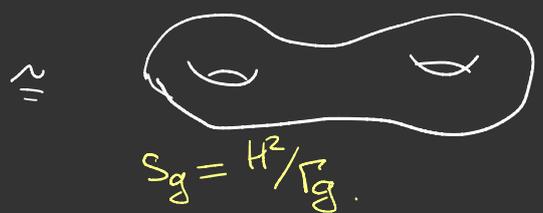
Отсюда вытекает следующий нетривиальный

факт: $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ (где $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

④ Группы отражений, многогранники Кокстера и теория Винберга

1882 Poincaré, Дюк - (классификация) фуксовы группы $\Gamma < \text{Isom}(H^2)$

т.е. в том числе и многоугольники Кокстера в H^2 . (Для E^2 и S^2 довольно просто).



Опр. Обобщ. выпуклый многогранник $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k \subset X^n$ назыв. мн-ком Кокстера, если $\forall i \neq j$ либо $L(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$, где $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} = \{2, 3, \dots\}$, либо $H_i \parallel H_j$, т.е. $m_{ij} = \infty$ (если $X^n = H^n$, то $H_i \cap H_j \in \partial H^n$), либо, в случае $X^n = H^n$, H_i и H_j - расход., т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset$ и $\text{clos}(H_i) \cap \text{clos}(H_j) \neq \emptyset$.

Матрица Грама $G(P) = G(e_1, \dots, e_n)$, где $P = \bigcap_{k=1}^n H_{e_k}$.

Примеры 1) Многоугольники Кокстера в E^2, S^2, H^2 (см. выше).

2) Правильные многогранники в E^3 , например,



или симплекс



тоже дают хорошие замощения пр-ва E^3 .

Теор. ($X^n = E^n, S^n$ - Сократет; для $X^n = H^n$ - Винберг)

1) Пусть $\Gamma < \text{Isom}(X^n)$ - дискр. гр, порожд. отражениями. Тогда её функ. мн-к является мн-ком Кокстера P , при этом $\Gamma = \Gamma(P)$ явл. группой, порожд. отражениями в гиперплоскостях градей мн-ка P .

2) Верно и обратное: пусть $P \subset X^n$ - мн-к Кокстера. Тогда $\Gamma = \Gamma(P) < \text{Isom}(X^n)$ - дискретна, и P - её функ. мн-к.

Теор. (Кокстер, 1934 г., Ann. of Math.)

Классификация многогранников Кокстера конечного объема в $X^n = E^n$ и S^n (существуют для всех $n \geq 2$). Ответ будет представлен ниже в виде списка эллипт. и параболических диаграм Кокстера.

1966 год, Макаров - Компактные призмы Кокстера в H^3
(первые примеры неарифм. подгруппы в $PO_{3,1}(\mathbb{R})$)

Теория Э.Б. Винберга гиперболич. групп отражений (1967, Мат. Сборник)

- описание многогранников Кокстера в H^n с помощью их матриц Грама и диаграм/схем/графов Кокстера.
- Критерии компактности и конечности объема на языке подматриц и подсхем.
- Критерий арифметичности и квазиарифметичности для групп отражений.

Опр. Обобщ. вып. мн-к назыв. остроугольным, если $\angle(H_i, H_j) \leq \pi/2$. (Частный случай: мн-ки Кокстера).

Теор. (Андреев, 1970).

Классификация остроуг. мн-ков конечного объема в H^3

Теор. (Винберг, 1981 и 1984, доклад на ИСМ 1983).

Не существует компактных мн-ков Кокстера в $H^{\geq 30}$

Теор. (Прохоров '1986, Хованский, 1986).

Не существует мн-ков Кокстера конечн. объема в $H^{\geq 996}$

Теор. (Винберг)

О существов. и единств. остроуг. мн-ка в H^n с заданной матрицей Грама.

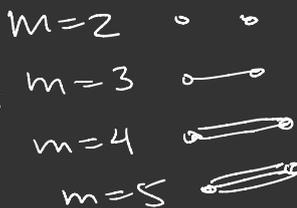
Пусть $G^T = G = \left(\begin{matrix} 1 & & & \\ & g_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \right), g_{ij} \leq 0$

и $G \sim \begin{pmatrix} n & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Тогда $\exists!$ остроуг. $P \subset H^n: G = G(P)$

Let $P = \prod_{k=1}^N H_k^-$ be a Coxeter polytope.

Coxeter diagrams/schemes/graphs



H_i H_j if $\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$

H_i H_j if $H_i \parallel H_j$ ($\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{\infty} = 0$).

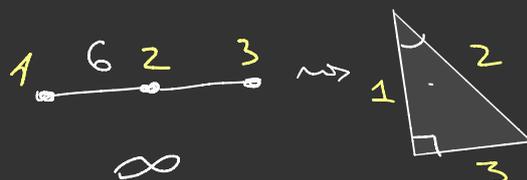
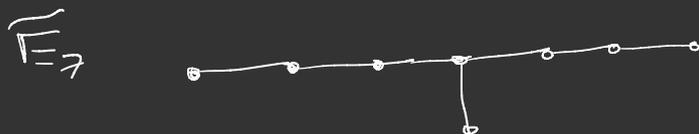
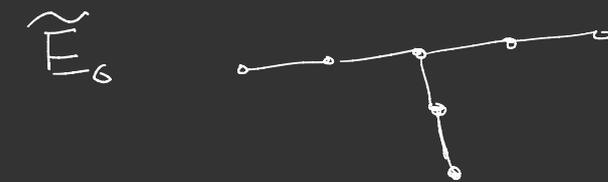
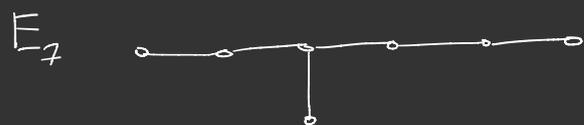
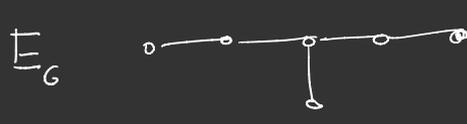
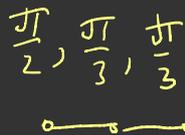
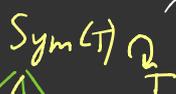
H_i H_j $g_{ij} = \cosh \rho(H_i, H_j) = |\langle e_i, e_j \rangle_{\delta_{n,1}}| > 1$

Coxeter classification of connected diagrams

Elliptic (S^n)

Parabolic (E^n)

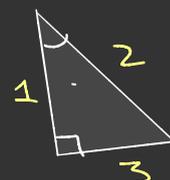
(Simple roots and Dynkin diagrams for Lie algebras)



$G_2^m = I_2^m$

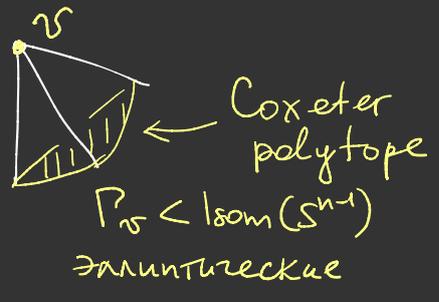
$D_m^4 = Dih_m$

$\widetilde{I}_2 = \widetilde{I} = \widetilde{A}_1$

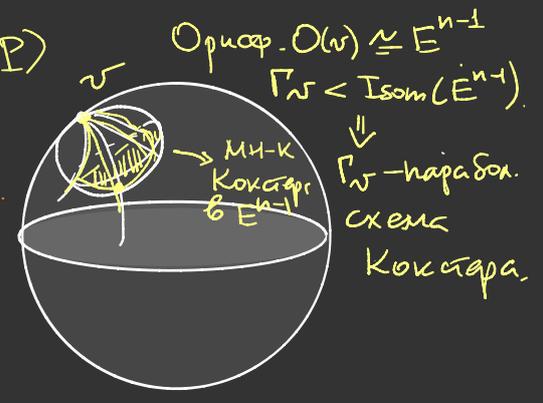


Coxeter polytopes in H^n ; $\Gamma = \Gamma(P)$

Usual vertex $v \in H^n$



Ideal vertex on the boundary $v \in \partial H^n \cong S^{n-1}$



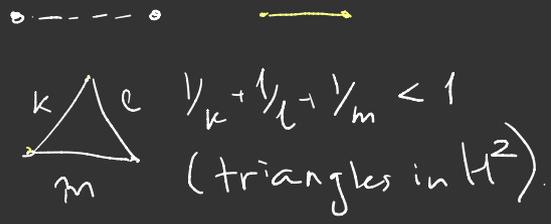
Coxeter diagram/scheme/graph of P is $S(P)$.

$\text{rank } S(P) := \text{rank}(G(P))$; signature of S = signat. of G.

Thus, elliptic subdiagrams of rank n \rightsquigarrow usual vertices
 of rank n-1 \rightsquigarrow edges
 parabolic subdiagrams of rank n-1 \rightsquigarrow ideal vertices.



Lanner diagrams = diagrams of compact a Coxeter simplex = diagrams, all whose proper subdiag. are elliptic.



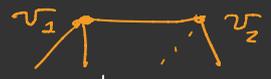
Thm (Lanner '1950)
 Do not exist in $H^{\geq 5}$.
 Classified in $H^2 \leq n \leq 4$

Compact conv polytope = conv hull {usual (finitely many) vert.} \cup {id vert.}
Fin Vol = Conv {usual id vert.}

Teop. (Bursepz, 1967, 1971-72)

Let P be a hyperbolic Coxeter n-polytope (i.e. $G(P) \sim (n, 1, 0 \dots 0)$)

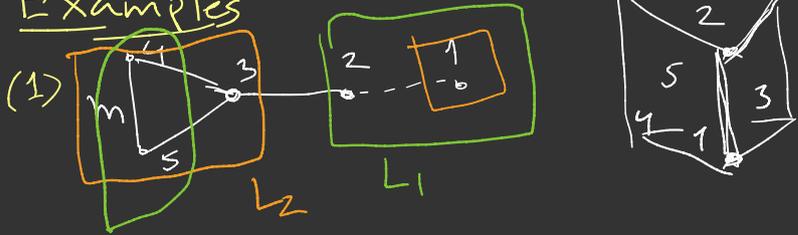
1) P is compact \iff every elliptic $S_1 \subset S(P)$ can be extended to an elliptic subdiag of rank n in precisely 2 ways.
 rank $S_1 = n-1$



2) $\text{Vol}(P) < +\infty \iff$ —||— can be extended to an ellipt subdiag of rank = n or parabolic of rank = n-1 in precisely 2 ways.

3) If for every Lanner $S_1 \subset S(P)$ we have $\text{rank}(S_1 \cup S_1^\perp) = n+1$, then P is compact.

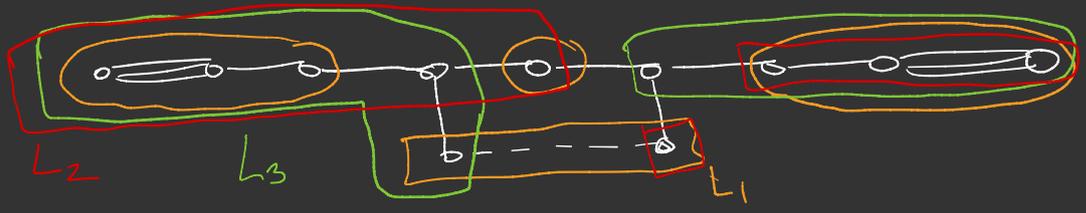
Examples



$$\text{rank}(L_1 \cup L_2^\perp) = 4$$

$$\text{rank}(L_2 \cup L_2^\perp) = 4$$

(2) Record example of Bugaenko in H^8 (1992)
(arithmetic).



$$2 + (3 + 3 + 1) = 9$$

$$5 + (1 + 3) = 9$$

$$5 + 4 = 9$$

(5) Примеры в $\text{Isom}(E^n)$ и $\text{Isom}(S^n)$.

Теор. (Фегорал, 1885-1891)

Существует всего лишь

- 17 кристаллограф. групп в E^2
- 230 кристалл. групп в E^3

т.е. таких $\Gamma < \text{Isom}(E^n)$, что
 $\text{Vol}(E^n/\Gamma) = \text{Vol}(D) < +\infty$,
 где D - о-гн. область.

Пусть $\Gamma < \text{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$. Тогда для каждого

$\gamma = t_\gamma \cdot \Gamma_\gamma$, где t_γ - перенос, $\Gamma_\gamma \in O_n(\mathbb{R})$. Введем обозн:

$$P_\Gamma = \{ \Gamma_\gamma \in O_n(\mathbb{R}) \mid \gamma \in \Gamma \}$$

- точки (the point) для Γ
группы group

Известно, что P_Γ не обязат. явл. подгр. в $O_n(\mathbb{R})$, но при этом $P_\Gamma \cong \Gamma/L$, где $L \triangleleft \Gamma$ - подгр. паракл. переносов.

Нетрудно убедиться, что P_Γ действительно является группой, т.е. $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1} \circ \Gamma_{\gamma_2}$, если $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$. Более того, можно показать, что $P_\Gamma < \text{Sym}(L)$.

Теор. (Бидербах, 1911)

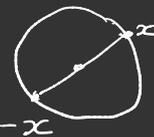
1) Пусть $\Gamma \triangleleft \text{Isom}(E^n)$, $\text{vol}(E^n/\Gamma) < +\infty$. Тогда

- $\text{card}(P_\Gamma) < +\infty$.
 - $\mathbb{Z}^n \triangleleft \Gamma$
как дискр. подгр. параллельных переносов
- т.е. Γ "виртуально абелева"
(сог. абелеву подгр. кон. индекса)

2) $\forall n \exists$ лишь конечное число таких групп $\Gamma \triangleleft \text{Isom}(E^n)$.

Теор. Пусть $\Gamma \curvearrowright S^n$ - своб. дискр. группа на S^n , $\Gamma \triangleleft \text{Isom}(S^n)$, $\Gamma \neq 1$. Тогда

1) $S^n/\Gamma \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\mathbb{Z}_2 = S^n/\{\pm I\}$,
если $n=2k$



2) Если же $n=2k+1$, то S^n/Γ - ориентируемое.

6) Аффинные плоские многообразия и гипотеза Ауслендера

Рассмотрим группу $\text{Aff}(E^n) = \mathbb{R}^n \times \text{GL}_n(\mathbb{R})$. В ней также можно рассматривать дискр. подгруппы. При этом $\mu(\text{Aff}(\mathbb{R}^n)/\Gamma) < +\infty \Leftrightarrow \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) < +\infty$. Что такое \mathbb{R}^n/Γ ?

Теор. Следующие определения для плоского аффинного многообр-я эквивалентны:

(1) M - гладкое мн-е с атласом $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где φ_α - функции склейки

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n) \mid U \subset \mathbb{R}^n$$

(2) M - гладкое мн-е с аффинной связностью $\nabla \subset \mathbb{R}^n \ni 0$ и $T_\nabla = 0$,
где $T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ и

$$R_\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$
тензор кривизны кривизны
↑ алгебра Ли вект. полей

(3) $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, где $\Gamma \triangleleft \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ и $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$
torsion free, properly discontinuously

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

The Auslander Conjecture (1964)

Пусть $M = \mathbb{R}^n / \Gamma$ - компактное афф.-многообразие.

Тогда $\Gamma = \pi_1(M)$ виртуально разрешима.

(Milnor, 1968, Conj: верна без усл-я компактности)
Margulis, 1987 контр-пример, используя гиперб. элементы $\gamma_1, \gamma_2 \in SO_{2,1}(\mathbb{R})$)

Теор.

Гипотеза Ауслендера верна при

- $n=2$ (несложная теор).
- $n=3$ (Fried, Goldman, 1983)
- $4 \leq n \leq 6$ (Abels, Margulis, Soifer, 2012)
- $n=4,5$ (Tomanov, 1990-2016)

Теор. Пусть $\Gamma < PO_{n,1}(\mathbb{R})$ ^{torsion-free (!)} - решетка. Тогда $\Gamma > F_2$ и не явл. вирт. разрешимой.

Теор. (Margulis & Vinberg, 2000)

Пусть $\Gamma < PO_{n,1}(\mathbb{R})$ - дискр. подгр, содержит отражение и не оставл. на месте ни одну плоскость или только на ∂H^n .

Тогда Γ явл. large, т.е. содержит подгр. Γ' конечного индекса,
т.е. $\Gamma / \Gamma' = F_n, n \geq 2$.