Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 14

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца–Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

VII Деформации ($\mathbb{H}^2$) и жесткость ($\mathbb{H}^{\geq 3}$): pants decomposition (штаны); mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли $\mathcal{I}_g$ и ядро Джонсона $\mathcal{K}_g$; твисты Дэна (Dehn twists); curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

VIII Теоремы жесткости Мостова, Прасада и Маргулиса. Доказательство теоремы жесткости Мостова для компактных гиперболических мног-ий.

IX Арифметические группы: общая теория

X Разные типы арифметических и неарифметических решеток в $PO_{n,1}(\mathbb{R})$

8) Арифметические подгруппы в $\mathrm{Isom}(H^n)$ для $n=2,3,7$.

$n=2$

$k<\mathbb{R}$ — вп. вещ. поле, D алг. кват., т.ч. $D\otimes\mathbb{R}=\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $D^{\sigma}\otimes\mathbb{R}=\mathbb{H} = D(-1,-1)$

Тогда $\forall$ порядка $\mathcal{O}\subset D$ группа $PSL_1(\mathcal{O}) \underset{\text{дискр.}}{\overset{\text{lattice}}{\subset}} PSL_2(\mathbb{R})=\mathrm{Isom}^+(H^2)$.

Если $k=\mathbb{Q}$ и $D=\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$, то $H^2/PSL_1(\mathcal{O})$ некомпактно.

$n=3$ Пусть $L\subset\mathbb{C}$ — мнимое поле алг. чисел, у которого все влож. $\sigma(L)\subset\mathbb{R}$ кроме тождественного и компл. сопряжения (т.е. L has 1 complex place). Пусть D - кват. алг., т.что $D^{\sigma}\otimes\mathbb{R}=D(-1,-1)$ $\forall\sigma: L\hookrightarrow\mathbb{R}$. Тогда $\forall\,\mathcal{O}\subset D$ гр. $PSL_1(\mathcal{O})\overset{\text{lat.}}{\subset} PSL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(H^3)$.

Если L — мнимое квадр. поле и $D=\mathrm{Mat}_2(L)$, то $H^3/PSL_1(\mathcal{O})$ некомпактно. Всякая арифм. подгр. в $PSL_2(\mathbb{C})$ соизм. с какой-то $PSL_1(\mathcal{O})$.

Группа $PSL_1(\mathcal{O})$ явл. арифм. гр. I типа $\Leftrightarrow$ L/k — мнимое квадр. расшир. вп. вещ. поля k.

Пример (группы Бьянки).

$L=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $m\in\mathbb{Z}_{>0}$; $D=\mathrm{Mat}_2(L)$, $\mathcal{O}=\mathrm{Mat}_2(\mathcal{O}_L)$.

$Bi(m):=PSL_1(\mathcal{O})=PSL_2(\mathcal{O}_L)<PSL_2(\mathbb{C})$. — non-uniform lattice

Известно, что $Bi(m)\sim O'(x_1x_2+x_3^2+mx_4^2;\mathbb{Z})$.

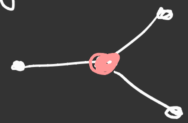
- - - ——

Если квадр. форма (the norm form) $N_{L/k}(D)$ расщепл. над k, тогда имеем I тип, иначе II.

Если L не сод. вещ. подполе k, т.ч. $[L:k]=2$, то $PSL_1(\mathcal{O})\in$ III тип.

$n=7$. Из классиф. Титса известно, что $\exists$ алг. k-гр. G, т.что $G(\mathbb{R})\overset{\text{изог}}{\simeq} PO_{7,1}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ индуцирует автом. порядка 3 группы $G(k)$, где $\bar{k}$ — алгебр. замыкание поля k. Алг. гр. G допуст. для $PO_{7,1}(\mathbb{R})$

и действие $Gal(\bar{k}/k)$ на корнях $G(\bar{k})$ изоморфны S_3.

Таким обр., $G(\bar{k})$ имеет тип ${}^6D_{4,1}$ 

Арифм. решетка III типа — это $\Gamma \sim G(\mathcal{O}_k)$ (они все кокомп.)

⑨. Критерий арифметичности Винберга для подгрупп PSL_2.

Винберг, "Наим. поле опред. подгр. группы PSL_2", Мат. Сб. 1993

Теор. (Винберг'1971).

Пусть $\Gamma \underset{\text{реш}}{<} H$ — н/п вещ. гр. Ли, где $H \cong G(\mathbb{R})$ и G — н/п алг. $\mathbb{C}$-группа.

Тогда 1) поле (adjoint trace field) $k = \mathbb{Q}(\{tr(Ad(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma\})$ — инвариант класса соизмеримости Γ.

$Ad: G \to GL(\mathfrak{g})$.

2) $\Gamma < G(k)$ 3) G опред. над k.

Пусть теперь $G = PSL_2$, и $g \in G$. Н.сг., что $g = diag(\lambda, \lambda^{-1})$.

Какие будут собств. знач. у $Ad(g)$? Имеем:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\lambda^{-1} & b\lambda\\ c\lambda^{-1} & d\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\lambda^2\\ c\lambda^{-2} & d\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$, т.е. $a+d=0$

Отсюда следует, что $Eigen(Ad(g)) = \{\lambda^2, \lambda^{-2}, 1\}$.

Тогда $tr(Ad\,g) = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 = tr(g^2) + 1 = (tr\,g)^2 - 1$

Если Γ плотна по Зарисскому в PSL_2, то её инвар. поле в теор. Винберга есть $k = \mathbb{Q}(tr\,\Gamma^2) = \mathbb{Q}((tr\,\Gamma)^2)$

Теор. Решетка $\Gamma < PSL_2$ явл. арифм., где $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_s \rangle$, $[\gamma_1\gamma_2] \neq 0$ $\Leftrightarrow$

1) $k_\Gamma = \mathbb{Q}(tr\,\Gamma^2)$ — поле алг. чисел; все вложения поля $L_\Gamma = \mathbb{Q}(tr\,\Gamma)$ т.что $\sigma|_{k_\Gamma}$ — нетожд., явл. веществ.

2) $\forall \sigma \neq id : k_\Gamma \to \mathbb{R}$ имеем $\sigma((tr\,\gamma_1)^2) < 4$ и $\sigma(tr[\gamma_1, \gamma_2]) < 2$

3) все $tr\,\gamma_i$ и $tr(\gamma_i\gamma_j)$ — целые алгебр. ($[\gamma_i, \gamma_j] \in \Gamma^2$).

Sarnak's B-C-conjecture (Peter Sarnak '1995)

bounding clustering

$\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ арифметична $\Leftrightarrow$ $tr(\Gamma)$ удовл. B-C-свойству:

$\exists\ B(\Gamma) \equiv const:\ \forall n\ \ \#\{tr(\Gamma)\cap[n,n+1]\} < B(\Gamma)$.

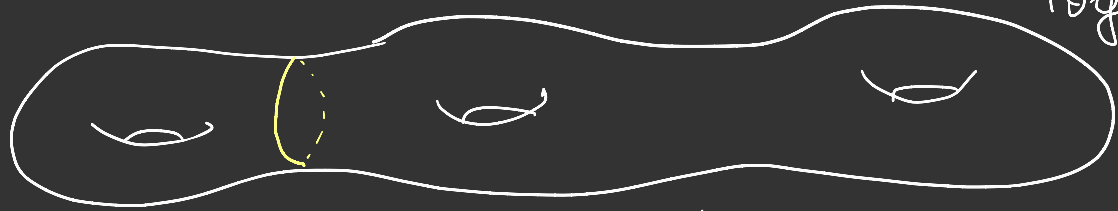
Теор. 1) $\Rightarrow$ Luo, Sarnak - 1994

2) $\Leftarrow$ для некомп. $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$. Geninska, Leuzinger '2008 Duke Math J.

(10). Неарифм. многообразия

Многообразия Громова и Пятецкого-Шапиро (1986) в H^n для всех $n \geq 2$.

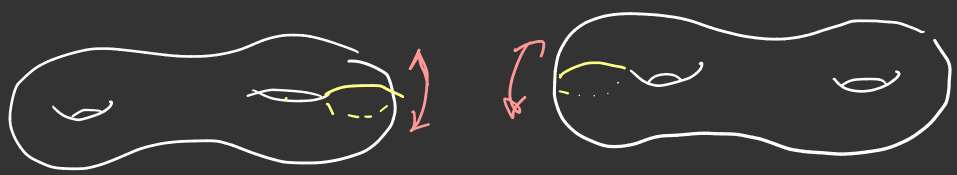
Пусть M_1 и M_2 — несоизмер. арифм. многообразия. Тогда $M_1 \# M_2$ — неарифм.



M_1 M_2

Thomson '2016

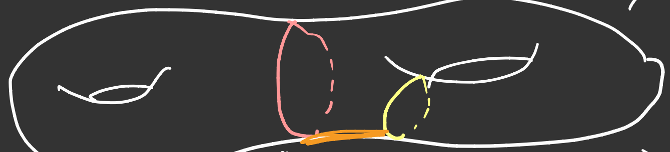
GPS-manifolds are not quasi-arithmetic.



Многообразия Агола (2006) - Белолипецкого (2011) - Томсона

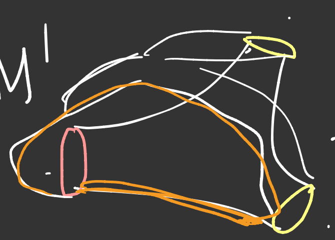
ABT-manifolds

M

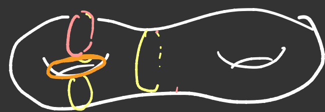


N_1 N_2 $\rho(N_1, N_2)$ - маленькое.

M'



M'' - doubling of M' in its boundary



Thomson 2016 ABT-manifolds are quasi.

XI Новые прорывы

Теор. (Bader, Fisher, Miller, Stover, Ann. Math 2021).
Гиперб. мн-е H^n/Γ, где $\Gamma \underset{\text{реш}}{<} SO^+(n,1) = \mathrm{Isom}^+(H^n)$ явл арифм. $\Leftrightarrow$ M содержит бесконечно много макс. вполне геодезических (погруженных) подмногообразий?

- - - - - - - - -

Belolipetsky, Bogachev, Kolpakov, Slavich
"Subspace stabilisers in hyperbolic lattices", arxiv: 2105.06897.

Опр. 1 Погруженный вп. геод подорбифолд $N \subset M = \underset{\text{гип. орб.}}{H^n/\Gamma}$ наз. fc-подпр-вом, если $\exists$ кон. подгр $F < \mathrm{Comm}(\Gamma)$, т.ч. $H = \mathrm{Fix}(F)$ есть плоскость в H^n и $N = H/\mathrm{Stab}_\Gamma(H)$.
(finite centraliser)

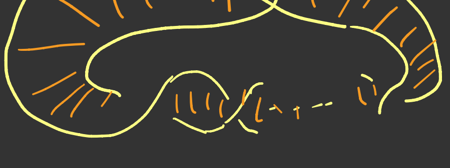
Теор. 1 Пусть $M = H^n/\Gamma$ гипрб. орбифолд, $\mathrm{vol}(M) < +\infty$.
Тогда 1) M - арифм $\Rightarrow$ M содержит беск. много вп. геод подпр-в и все они fc.

2) Если M имеет тип I или II, то всякий его вп. геод. подорбифолд тоже имеет соотв. тип I или II.

3) Если M — неарифм, то M содержит лишь кон. число fc-подпр-в, причем $\#\{fc < M\} < \mathrm{const} \cdot \mathrm{vol}(M)$.

Теор 2. GPS manifolds содержат не-fc-подпр-ва коразмерности 1.

Теор 3. $\forall j \geq 2$ $\exists$ гипрб 3-мне M_j, содержащее ровно j вполне геод. поверхностей и все они не явл. fc-пов-тями.
Здесь M_j — j-листное накрытие над $N_t = S^3 \setminus K_t$, где K_t — гиперб. узел
twist knot



|||| — это S^2 без 3 точек.