Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 13

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца – Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

VII Деформации $(\mathbb{H}^2)$ и жесткость $(\mathbb{H}^{\geq 3})$: pants decomposition (штаны); mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли I_g и ядро Джонсона K_g; твисты Дэна (Dehn twists); curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

VIII Теоремы жесткости Мостова, Прасада и Маргулиса. Доказательство теоремы жесткости Мостова для компактных гиперболических мног-ий.

IX Арифметические группы: общая теория

X Разные типы арифметических и неарифметических решеток в $PO_{n,1}(\mathbb{R})$

⑤ Простые алгебраические группы и системы корней, схемы Дынкина и классификация Титса.

Опр. Подмн-во $\Phi \subset V$ – евкл. вект. пр-во назыв. системой корней, если вып. след. усл-я:

(1) $\Phi \neq \emptyset$; $\operatorname{rk}\Phi = \dim V$; (все $v \in \Phi$ не равны 0),

(2) $\forall \alpha \in \Phi$ $\quad R_\alpha(\Phi) = \Phi$, где $R_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

(3) $\alpha, \beta \in \Phi \Rightarrow R_\alpha(\beta) - \beta = t \cdot \alpha$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Из (2) следует, что $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$. Из (3): если $\alpha \in \Phi$ и $t\alpha \in \Phi$, где $t \in \mathbb{R}$, то $t \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$.

Опр. Система корней назыв. приведенной, если из того, что $\alpha, t\alpha \in \Phi$ следует, что $t = \pm 1$.

Опр. Группа Вейля системы корней $W(\Phi) = \langle R_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$.

Камера Вейля – это фунд. многогр. конус для $W(\Phi) \curvearrowright V$.

Предл. Пусть G – св. п/п алг k-группа; S – макс. k-расщ. тор; $S \subset T$, где T – максимальный тор; $\Phi(S', G)$ обозначает мн-во нетрив. характеров тора $S' \subset T$ отн. присоед. предст. группы G.

(Характер $\chi \in X(S')$ – характер тора S' относит. (или в) предст. ρ группы G, если $\exists v \neq 0$: $\rho(s)v = \chi(s)v$ $\forall s \in S'$).

Тогда $\Phi(S, G)$ – сист. корней в $X(S) \otimes \mathbb{R}$; она нетрив., если G – k-п/п; $W(S,G) := N_G(S)/Z_G(S)$ совп. с $W(\Phi(S,G))$.

Более того, $\Phi(T, G)$ – привед. система корней.

Система $\Phi(S,G)$ нетрив $\Leftrightarrow$ G – почти проста.

Группы G и G' имеют один. схему Дынкина $\Leftrightarrow$ G и G' изогенны

Схемы Дынкина (для простых $\mathbb{C}$-групп).

$e_1, \dots, e_n$ — базис в V.

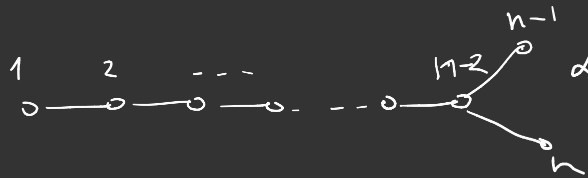
A_n  $\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$

$\alpha_n = e_n - e_{n+1}$; $\Phi \subset H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_k = 0\}$

B_n  $\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n,\ \alpha_n = e_n$

$|\alpha_j| = \sqrt{2},\ j \le n-1,\ |\alpha_n| = 1$

C_n  $\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n,\ \alpha_n = 2e_n$.

D_n 

$\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n,$

$\alpha_n = e_{n-1} + e_n.$

⋮

Пусть теперь G — алг. k-группа; $\bar{k}$ — алгебр. замыкание поля k.

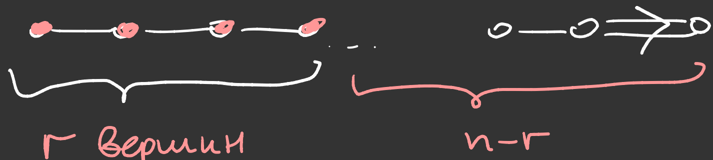
$\Gamma = Gal(\bar{k}/k)$. Тогда Γ действует на Δ — системы простых корней

(Простые корни — это такие положит. корни $\neq$ сумме положит. корней.)

Пусть $\Delta_0 \subset \Delta$ — соотв. макс. k-расщ. тору $S \subset T$.

На схеме Дынкина будем отмечать (кружочком ...) выделенные орбиты гр. Γ, не принадлежащие Δ_0.

Тип $B_{n,r}$



Выделенные вершины: $1, 2, \dots, r$.

Описание: $SO_{2n+1}(k, q)$, где q — квадр. форма отриц. индекса r

Предл. Из классиф. Титса следует, что все арифм. подгр. $\Gamma < Isom(H^{2n})$ будут простейшего типа. (Соотв. алгебр. k-группа имеет тип $B_{n,1}$.)

6) Кватернионные алгебры

Пусть $k\subset\mathbb{C}$ поле с $\mathrm{char}(k)=0$. Кватерн. алгебра над k — это 4-мерная центр. алгебра $D=D(a,b)$ с базисом $1, I, J, K$, где $I^2=a$, $J^2=b$, $IJ=-JI=K$, $K^2=-ab$. Заметим, что $D(1,1)\simeq \mathrm{Mat}_2(k)$, где $1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Известно, что всякая кватерн. алгебра D либо изоморфна $\mathrm{Mat}_2(k)$, либо явл. алгеброй с делением.

Во всякой кватерн.алг. D есть анти-автоморфизм $q\mapsto q^*$, для которого мн-во неподв. точек есть поле k:

$$(A+BI+CJ+DK)^*=A-BI-CJ-DK,\quad (pq)^*=q^*p^*.$$

Если $D\simeq \mathrm{Mat}_2(k)$, то $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

Норма и след: $N(q)=qq^*\in k$, $Tr(q)=q+q^*$. Если $D=\mathrm{Mat}_2(k)$, то $N(q)=\det(q)$, $Tr(q)=\mathrm{trace}(q)$. Мн-во $SL_1(D)=\{q\in D\mid N(q)=1\}$.

Если $D=\mathrm{Mat}_2(k)$, то $SL_1(D)=SL_2(k)$.

Пусть $\mathcal{O}_k$ — кольцо целых в поле алг. чисел k. Порядок в D — это $\mathcal{O}_k$-подмодуль $\mathcal{O}\subset D$, т.что $\mathcal{O}$ — подкольцо с 1 и $\langle\mathcal{O}\rangle=D$ над k.

Напр., $\mathrm{Mat}_2(\mathcal{O}_k)$ — всегда порядок в $\mathrm{Mat}_2(k)$. Если $D=D(a,b)$, где $a,b\in\mathcal{O}_k$, то все кват. с коэф. из $\mathcal{O}_k$ образуют порядок в D.

Группа единиц порядка $\mathcal{O}$: $SL_1(\mathcal{O})=SL_1(D)\cap\mathcal{O}$.

7) Arithmetic hyperbolic lattices via quaternion algebras

$k\subset\mathbb{C}$ — поле алг. чисел.

$$F(x,y)=\sum_{i,j=1}^{m} x_i^*\, a_{ij}\cdot y_j \quad (a_{ij}=-a_{ji}^*\in D)$$ — невырожд. косо-эрмит. форма на D^m.

Пусть $U(F,D)$ — группа автоморфизмов D^m и формы F, $U(F,\mathcal{O})$ — подгр $U(F,D)$, сохраняющая $\mathcal{O}_k$-решетку $\mathcal{O}^m$, где $\mathcal{O}\subset D$ — порядок.

Если $D \cong Mat_2(k)$, то $U(F, D) \simeq O(f, k)$, где

$F(x,y) = f(x,y)(I-1)J$, $f(x,y)$ – невырожд. симм. билин. форма на D^m_+, где $D^m_\pm = \{x \in D^m \mid xI = \pm x\}$, и

$D^m = D^m_+ \oplus D^m_-$; $\dim D^m = 2m$. (на D^m_+: $x(I-1)=0$).

Пусть теперь $D \not\simeq Mat_2(k)$ и $D^\sigma \otimes \mathbb{R} \simeq Mat_2(\mathbb{R})$ $\forall \sigma_{\neq id}: k \hookrightarrow \mathbb{R}$.
Пусть F – допустима, т.е. имеет сигн. над $\mathbb{R}$ $(2m-1, 1)$ и $F^\sigma \sim (2m, 0)$ $\forall \sigma \neq id: k \hookrightarrow \mathbb{R}$. Тогда снова существует f, соотв. нашей форме F (с другим соотношением) и $U(F, D \otimes \mathbb{R}) \simeq O(f, \mathbb{R})$, где $O(f, \mathbb{R}) \simeq O_{2m-1,1}(\mathbb{R})$.

Тогда $PU(F,O) = U(F,O) \cap PO_{2m-1,1}(\mathbb{R})$ – решетка в $\mathrm{Isom}(H^{2m-1})$

Все группы $\Gamma \sim PU(F,O)$ – арифм. решетки II типа.

Данные арифм. группы соответствуют алгебр. k-группам $C^{(2)}_{m,1}$.
Помимо них мы получаем арифм. группы типа I, соотв. группам

${}^1D^{(1)}_{m,1}$, где $n = 2m-1$, m – нечетно
${}^2D^{(1)}_{m,1}$, где $n = 2m-1$, m – четно.

(Поскольку у Титса $disc(f) = (-1)^{n(n-1)/2} \det(f)$)