Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 12

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца–Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

VII Деформации ($\mathbb{H}^2$) и жесткость ($\mathbb{H}^{\geq 3}$): pants decomposition (штаны); mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли $\mathcal{I}_g$ и ядро Джонсона $\mathcal{K}_g$; твисты Дэна (Dehn twists); curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

VIII Теоремы жесткости Мостова, Прасада и Маргулиса. Доказательство теоремы жесткости Мостова для компактных гиперболических мног-ий.

IX Арифметические группы: общая теория

X Разные типы арифметических и неарифметических решёток в $PO_{n,1}(\mathbb{R})$

① Напоминание из общей теории

Основные поля: $k \subset \mathbb{C}$, где $[k:\mathbb{Q}] = d$, т.е. $k = \mathbb{Q}(\alpha)$. Если $\forall \sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$ имеем $\sigma(k) \subset \mathbb{R}$, то k назыв. вполне вещ. Напомним опр. арифм. групп.
Пусть $k \subset \mathbb{R}$ — вполне вещ поле алг.чисел, $\mathcal{O}_k$ - кольцо целых.

Пусть H — некомп. п/п группа Ли, т.что H^0 не имеет комп. множ.

Опр. Алгебр. k-группа G назыв допустимой для H, если G — простая и $\exists$ сюр. гомом. $\varphi: G(k\otimes\mathbb{Q}) \longrightarrow H$ с комп. ядром.

Т.е. $\prod_\sigma G^\sigma(\mathbb{R}) \overset{\text{изотения}}{\cong} H\times K$. $\left(\prod_{\sigma: k\hookrightarrow\mathbb{R}} G^\sigma(\mathbb{R})\right)$

с конечным ядром

Опр. $\Gamma_1, \Gamma_2 < H$ соизмеримы, если $[\Gamma_j ; \Gamma_1\cap\Gamma_2] < +\infty$ $\forall j = 1,2$ $(\Gamma_1 \sim \Gamma_2)$.

Они соизм. в широком смысле, если $\exists h\in H: h\Gamma_1 h^{-1} \sim \Gamma_2$.

Теорема (Borel & Harish-Chandra '1962, Ann. Math.)

$\dim \mathcal{O}_k/\mathbb{Z} = d$

$\dim k/\mathbb{Q} = d$

Если для $\Gamma < H$ верно, что $\Gamma \sim G(\mathcal{O}_k)$, где G — доп. k-гр. для H, то Γ — решетка в H (по мере Хаара).

Более того, если $\pi: \underset{H\times K}{\overset{\shortparallel}{G(k\otimes\mathbb{Q})}} \to G(k\otimes\mathbb{Q})/K'$, где $K' < K$ (какая-то часть), то $\pi(G(\mathcal{O}_k))$ - решетка в $\pi(H\times K)$.

Опр. Решетки в H из теор. Б—Х-Ч наз. арифметическими.

Теор (Margulis Arithmeticity Theorem '1974).

Всякая неприв. решетка $\Gamma < G$ в п/п гр.Ли за исключением случая, когда G изогенна $SO_{n,1}(\mathbb{R})\times K$ или $SU_{n,1}\times K$, явл. арифметической.

Примеры 1) $SL_2(\mathbb{Z})$ - арифм. решётка в $SL_2(\mathbb{R})$.
2) $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ - арифм. решетка в $SL_2(\mathbb{R})\times SL_2(\mathbb{R})$.

② Простые и полу-простые алгебраические k-группы

Опр. Пусть $x \in GL_n(\mathbb{C})$. Тогда $\exists!\ x_s, x_u \in GL_n(\mathbb{C})$:

$x = x_s x_u = x_u \cdot x_s$, где x_s – п/п элемент (диагонализуемый), x_u – унипотентный эл-т, т.е. $(x_u - 1)$ – нильп: $(x_u-1)^m = 0 \Leftrightarrow$ все $\lambda(x_u)=1$.

k-Тор – коммут. алгебр. k-группа, связная и сост. из полупростых (диаг) элементов. Всякий тор сопряж. подгр. диаг. матриц и изоморфен $\underbrace{GL_1 \times \ldots \times GL_1}_{\dim T} = k^* \times \ldots \times k^*$. Тор назыв. k-расщепимым, если он k-изоморфен $(k^*)^{\dim T}$. Вещ. ранг гр. G – dim макс. $\mathbb{R}$-расщ. тора ($\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G$).

Пусть G - алгеб. k-гр. Тогда $G^{(u)}$, $G^{(s)}$ – мн-ва всех унип. и п/п эл-тов для группы G. Мн-во $G^{(u)}$ явл. алгебр. k-подмн-ем в G. (Известно, что $G^{(u)}, G^{(s)} \subset G$). Если $g \in G(k)$, то $g_s, g_u \in G(k)$. При всяком морфизме $\varphi: G_1 \to G_2$ имеем: $\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$ и $\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$.

Опр. Характеры алг группы G – это морфизмы $G \to GL_1$. Они образуют конечно пор. коммут. группу $X(G)$.

Например, если T - алгебр. тор, то $X(T)$ – свободная абелева гр. ранга $\dim(T)$.

Опр. Радикал (унипот. радикал) алг. k-гр. G — это макс. связная разрешимая (унипот.) алгебр. норм подгруппа.

G редуктивна, если её униn. радикал тривиален и G – п/п, если ее радикал $= e$. (Если G – п/п, то она редуктивна)

Лемма $G/\operatorname{Rad}(G)$ – п/п группа, $G/\operatorname{Rad}_u(G)$ – редуктивная гр.

Опр. Группа G проста, если у нее нет нетрив. норм. алг. подгрупп и почти проста, если все такие подгр. конечны.

Предл. Связная алг. гр. G расклад. в прямое произв. почти простых алгебр. подгр., т.е. $G \simeq G_1 \times \ldots \times G_m$.

③ Arithmetic and quasi-arithmetic hyperbolic lattices

Пусть G — почти простая группа Ли, напр., $G = PO_{n,1}(\mathbb{R})$. Тогда общее определение арифм. подгрупп можно переформулировать более простым образом, т.к. G не может быть изогенна прямому произв-ю простых групп.

Let $G = PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ and let

$k \subset \mathbb{R}$ be a totally real number field; $[k:\mathbb{Q}] = d < \infty$

$\mathcal{O}_k$ be the ring of integers of k.

Def. A simple algebraic k-group $\tilde{G}$ is admissible for G if $\tilde{G}(\mathbb{R}) \simeq G$ and $\tilde{G}^\sigma(\mathbb{R})$ is compact for any $\sigma \neq id: k \to \mathbb{R}$.

$$\tilde{G}: \begin{cases} p_1(\ ) = 0 \\ p_k(\ ) = 0 \end{cases} \qquad p_j \in k[x_1, \dots, x_N]$$

Def. $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$ are commensurable if $\exists g \in G$: $\Gamma_1 \cap g\Gamma_2 g^{-1}$ is a finite index subgp in both Γ_1 and Γ_2.

Notation: $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Thm (Borel & Harish-Chandra, 1962)

If $\Gamma \subset G$ is commensurable with $\tilde{G}(\mathcal{O}_k)$, then Γ is a lattice, i.e. $\mathrm{vol}(G/\Gamma) < +\infty$.

Def. All subgroups commensurable with $\tilde{G}(\mathcal{O}_k)$ are arithmetic.

If a lattice $\Gamma \subset \tilde{G}(k)$, then Γ is quasi-arithmetic.

If Γ is quasi-arithmetic, but not arithmetic, then Γ is called properly quasi-arithmetic.

In all cases, k is called the ground field of Γ.

(Arithmetic hyperbolic lattices of type I.)

4 Arithmetic lattices of simplest type and arithmetic hyperbolic reflection groups.

$(-1, 1, \dots, 1)$

$(-\sqrt{2}, 1, \dots 1)$

Let $k \subset \mathbb{R}$ be a totally real number field

Def. An $\mathcal{O}_k$-module L with an inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ of signature $(n,1)$, s.t. $L \otimes_{\sigma(\mathcal{O}_k)} \mathbb{R} > 0$, is called a Lorentzian lattice ($f(x) = (x,x)$ is called admissible quadratic form)

$f^\sigma(x) > 0$

Let L be a Lorentzian lattice. Then $\boxed{L \otimes_{id(\mathcal{O}_k)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n,1}}$ and $\boxed{\mathbb{H}^n \simeq \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x)_{n,1} = -1\}^o}$ (the above component)

Notation $O'(L)$ is the group of integral automorphisms of L preserving $\mathbb{H}^n$ (i.e. $[O(L) : O'(L)] = 2$).

Def All groups Γ commensurable with $O'(L)$ are called arithmetic lattices of simplest type.

Def A lattice L is isotropic over k if $f(x) = (x,x)$ repr. 0 (ie. $\exists x \neq 0 : f(x) = 0$) and anisotropic otherwise.

$k \neq \mathbb{Q}$	$f^\sigma(x) = 0$	anisotr.
$k = \mathbb{Q}$	$n \geq 4$	$(n,1)$
	$n = 2,3$,	isotr / anisotr

Thm Venkov 1937 ($k = \mathbb{Q}$)
Borel & Harish-Chandra, 1962
Mostow & Tamagawa, 1962

Let L be a Lorentzian $\mathcal{O}_k$-lattice. Then: if $k = \mathbb{Q}$ and L is isotropic, then the quotient orbifold $\mathbb{H}^n / \underset{\Gamma =}{O'(L)}$ is non-compact, but of finite vol.

non-uniform hyp. lattice

In all other cases $\mathbb{H}^n / \Gamma$ is compact.

Thm (Vinberg, 1967)

Let $\Gamma \subset PO_{n,1}(\mathbb{R})$ be a hyperbolic lattice generated by reflections (in facets of finite volume Coxeter polytope $P \subset \mathbb{H}^n$)

1) If Γ is arithmetic, then it is of simplest type (i.e. preserves some L)

2) If Γ is quasi-arithmetic, then $\Gamma \subset O_k(f)$, where f is an admissible quadratic form over k, and $f \underset{\mathbb{R}}{\sim} -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ | $O_{\mathcal{O}_k}(f)$

Thm. (Vinberg's arithmeticity criterion, 1967)

Suppose $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, $\Gamma = \Gamma(P)$ is generated by reflections in facets of finite vol. Coxeter polytope $P = \bigcap_{k=1}^{N} H^-_{e_k}$. Let $G(P) = G(e_1, \ldots, e_N) = \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & -g_{ij} \\ & 1 \end{pmatrix}$ be the Gram matrix of P, and let $\tilde{k} = \mathbb{Q}(\{g_{ij}\})$.

Let us denote by $\mathrm{Cyc}(G)$ the set of cyclic products, i.e. $g_{i_1 i_2} g_{i_2 i_3} \cdots g_{i_s i_1}$. Let $k = \mathbb{Q}(\mathrm{Cyc}(G))$. (Thus, $k \subset \tilde{k}$).

Then Γ is arithmetic iff the following conditions hold:

(V1) $\tilde{k}$ is totally real

(V2) $\forall \sigma : \tilde{k} \to \mathbb{R}$, $\sigma|_k \neq id$, we have $G^\sigma \geqslant 0$ $\quad 2^k g_{i_1 i_2} \ldots$

(V3) $\mathrm{Cyc}(2 \cdot G) \subset \mathcal{O}_k$; $\quad$ o- - - -o $\quad 2\cos\frac{\pi}{m}$

and Γ is quasi-arithmetic iff (V1) + (V2).

In this theorem k = the ground field.

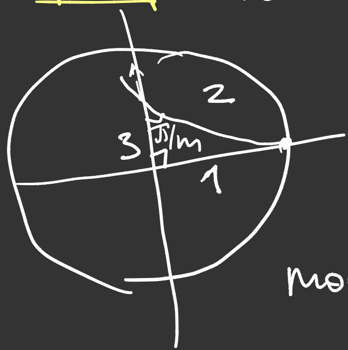
Def. Let L be a Lorentzian lattice ($\mathcal{O}_k$-), and let $R(L) \subset O'(L)$ be the subgroup generated by all reflections $R_e : x \mapsto x - \frac{2(e,x)}{(e,e)} e$, where $(e,e) \in \mathcal{O}_k$; $\frac{2(e,x)}{(e,e)} \in \mathcal{O}_k$. If $[O'(L) : R(L)] < +\infty$, then L is called *reflective*

$(e,e) > 0$

$(O'(L) = R(L) \rtimes \mathrm{Sym}(P))$ $\quad \Gamma = \Gamma_R \rtimes \mathrm{Sym}(P_R)$

Замечания 1) Если Γ квазиарифм. и некомп. гиперб. гр. отраж., то $k=\mathbb{Q}$. 2) Если в схеме Кокстера $S(P)$ нет пунктирных линий, то усл-е (V3) проверять не надо, т.к. $2\cos\pi/m$ - целое алг. число, и след. в этом случае квазиарифм = арифм

Пример Рассмотрим $\Gamma_m(T) < \mathrm{Isom}(H^2)$, где $S(T) = \underset{1}{\bullet}\overset{\infty}{=\!=\!=}\underset{2}{\bullet}\overset{m}{-\!-\!-}\underset{3}{\bullet}$



При каких m группа Γ_m квазиарифм?

Поскольку T имеет идеальную верш., то Γ_m может быть квазиарифм. только над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим $G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\cos\pi/m \\ 0 & -\cos\pi/m & 1 \end{pmatrix}$. Миноры (угловые) $=(1, 0, \det G)$

Но поскольку $k=\mathbb{Q}$, то нетожд. влож. нет. Т.е. (V2) проверять не надо. Далее, (V1) - выполн. Но $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}(\mathrm{cyc}(G))$. Отсюда получаем, что Γ_m (квази)арифметична $\Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow m=2,3,4,6$.

Теор. (Винберг '1981)

Не сущ.-комп. многогр. Кокстера в $H^{\geq 30}$

- арифм. некомп. гр. отражений в $H^{\geq 30}$.

Более того, при $14 \leq n \leq 29$ возможно лишь конечное число полей опред-я для арифм. гр. отражений: $k=\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, и т.д.

Рекордные примеры оба арифметические:
- компактный случай: H^8 Бугаенко 1992
- некомп: H^{21} Борчердс, 1987.

Теор. Имеется лишь конечное число классов соизмеримости макс. арифм. групп отражений в H^n. [При $n \geq 10$ Никулин и при фикс. n и d тоже Ник. ~1981]
- $n=2$ Лонг, Маклахлан, Рид 2005
- $n=3$ Агол
- $n \geq 2$ независимо: Агол, Белолипецкий, Сторм, Уайт 2007; Никулин 2007

Открытая проблема классификации

- арифм. групп. отр.
- рефлект. лоренц. решеток

для $k = \mathbb{Q}$ $\begin{cases} n \geq 6 \\ n = 3 \text{ анизотр. случай} \end{cases}$

сделано:

- $n = 2$ Никулин 2000, Аллкок 2011
- $n = 3, 4$ изотр. Шарлау, Вальхорн 1989–1993
- $n = 5$ Туркал 2017

$k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $n \geq 3$

- $n = 2$ Марк 2017.