Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники: Dave Morris "Ratner's Theorems..."
Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
Curtis McMullen ("Lectures..")
Alex Furman ("Lectures on..")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории-1

IV. Основы эргодической теории-2

V Эргодические действия групп

VI Эргодические теоремы: Hopf, Moore and Howe-Moore

VII Теоремы Howe-Moore в более общем случае.

VIII Приложения теоремы Мура: - жесткость Мостова
- пр-во унимод. реш-ок $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$

IX Теоремы Ратнер + Oppenheim Conj - Kazhdan's Property (T)

Теор 1 (Ratner's Orbit closure Thm)

Пусть G — группа Ли, $H < G$ — подгр, порожд. унип. эл-тами, $\Gamma < G$ — решетка. Пусть Hx — орбита в G/Γ. Тогда $\exists S < G$ подгр, т.ч. $H < S$, $\operatorname{clos}(Hx) = Sx$. Более того, S порождена унип-ми, и $\underbrace{\operatorname{Stab}_\Gamma(Sx)}_{=\Gamma_{Sx}} = \{\gamma \in \Gamma \mid (Sx)\gamma = Sx\} = S \cap \Gamma_x$ — решетка в S.

Опр. Пусть $S < G$ — алгебр. подгр., $\Gamma < G$ — решетка, $x \in G$, $D \subset S$ — фунд. обл. для $\Gamma_{Sx} \curvearrowright G/\Gamma$. Предположим, что $\mu_S(D) < +\infty$.

Положим $\mu_{Sx} := \dfrac{\mu_S|_D}{\mu_S(D)}$ — мера на $Sx = S/\Gamma_{Sx}$ (S-инв. вероятн. мера на Sx). Ее образ на G/Γ есть однор./алгебр. мера.

Теор 2 (Ratner's Measure Classification Thm)

Пусть $H < G$ — алг. подгр, порожд. унипотентами, $\Gamma < G$ — реш, и пусть μ — мера на G/Γ, эргодичная отн. H. Тогда $\mu = \mu_{Sx}$, где $H < S < G$ и S — тоже порожд. уни-ми.

Док-во теор 1 из теор 2.

1) Пусть H — унип. поток (1-пар. подгр). По теор. о среднем (см. про Pointwise Erg. Thm), если M — компакт, $\varphi_t : M \times \mathbb{R} \to M$, $\varphi_t \curvearrowright M$ гомеоморфизмами, f — непр. огран. ф-ция на M, то

$$\lim_{a \to \infty} \mu_{a,x}(f) := \lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \int_0^a f(\varphi_t(x))\, dt = \overline{\mu_{a,x}}(b)$$

$\overline{\mu_{a,x}}(b) \downarrow$ φ_t-инв. вероятн. мера.

$\mu_{\varphi_t x}$

Мера $\underset{\mu_{Hx}}{\overset{\mu_{\varphi_t x}}{\|}}$ в нашем случае эргодична, значит, однородна по теор 2. Отсюда $\operatorname{supp}(\mu_{Hx}) = \overline{Hx} = Sx$, где S порожд. унип. $\boxtimes$

2) В общем случае Теор 1 следует из п. 1) и след. леммы.

Лемма $\underset{\text{алг подгр}}{H < G}$, порожд. унип., $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie}(H)$, $\Gamma < G$ — решетка, $u_t = e^{tu}$ — 1-пар подгр, $x \in G/\Gamma$, $u \in \mathfrak{h}$. Тогда для нильпотента $u \in \mathfrak{h}$ имеем $\overline{u_t x} = \overline{Hx}$.

Шаг 1 По теор Ратнер для 1-пар + теор плотности Бореля имеем $\overline{u_t x} = Zd(\Gamma')$, где $\Gamma'(u)$ мин. подгр Γ_x : $Zd(\Gamma') > u^t$.

в силу алгебр. для 1-парам.

Шаг 2 Пусть $u_j \to u$ в $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie}(H)$. Тогда $\lim_j \Gamma'_j > \Gamma'(u)$

Шаг 3: отобр. $u_j \mapsto \Gamma'_j = \Gamma'(u_j)$ полунепр., принимает не более чем счетное число значений; для общего нильп. u: $\Gamma(u)$ не зав от u и содержит $\Gamma(u')$ $\forall u' \in \mathfrak{h}$ $\boxtimes$

Proof

Теор (Margulis' theorem (1987) of the Oppenheim Conj (1929))

Пусть $Q(x) \sim_{\mathbb{R}} (p,q)$, $p,q>0$, Q – иррац. Тогда $\overline{Q(\mathbb{Z}^n)} = \mathbb{R}$.

Док-во в частном случае (для $(p,q)=(2,1)$)

$G = SL_3(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$, $Q_0(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$;

$H = SO(Q_0)^\circ \cong SO_{2,1}(\mathbb{R})^\circ$. По теор. Ратнер о замыкании орбит: $\exists$ связная $S \underset{\text{подгр}}{<} G$, т.ч.

- $H < S$
- $\mathrm{clos}([gH]) = \mathrm{clos}([gS])$ $\left(\mathrm{clos}(Hx) = \mathrm{clos}(Sx),\ x \in G/\Gamma\right)$.
- $\exists$ S-инв. вероятн мера на $[gS]$

Лемма Если $G = SL_{p+q}(\mathbb{R})$, $H = SO_{p,q}(\mathbb{R})^\circ$, S – связная подгр, т.ч. $H < S < G$, то тогда $S = H$ или $S = G$.

(Док-во осн. на алгебрах Ли).

Случай 1 $S = G$. Тогда $\Gamma g H$ плотно в G, и имеем

$$Q(\mathbb{Z}^3) \overset{\substack{\text{поменяли}\\ \text{базис}}}{=} Q_0(\mathbb{Z}^3 g) \overset{\mathbb{Z}^3\Gamma = \mathbb{Z}^3}{=} Q_0(\mathbb{Z}^3 \Gamma g) \overset{\text{по опр } H}{=} Q_0(\mathbb{Z}^3 \Gamma g H) \text{ –}$$

плотно в $Q_0(\mathbb{Z}^3 G) = Q_0(\mathbb{R}^3 \setminus 0) = \mathbb{R}$

Случай 2 $S = H$. (Надо показать, что $Q(x) = \lambda P(x)$, где $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$).

Пусть $\Gamma(g) = \Gamma \cap gHg^{-1}$. Поскольку орбита $[gH] = [gS]$ имеет H-инв. мера, то $\Gamma(g)$ – решетка в $gHg^{-1} = SO(Q)^\circ$, и $Zd(\Gamma(g)) = SO(Q)^\circ$. Далее, $\Gamma(g) < \Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$, следовательно алгебр группа $SO(Q)$ опред. над $\mathbb{Q} \Rightarrow Q$ опред. над $\mathbb{Z}$. $\boxed{Ч.Т.Д.}$