Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:
- Dave Morris "Ratner's Theorems..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures...")
- Alex Furman ("Lectures on...")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории-1

IV. Основы эргодической теории-2

V Эргодические действия групп

VI Эргодические теоремы: Hopf, Moore and Howe-Moore

VII Теоремы Howe-Moore в более общем случае.

VIII Приложения теоремы Мура:
- жесткость Мостова
- пр-во унимод. реш-ок $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$
- Kazhdan's Property (T)

① Теорема жесткости Мостова

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ — компактные гиперболические многообразия.

Тогда при $n \geq 3$

$$\overset{(A)}{\underset{\pi_1(M_1)}{\underset{\shortparallel}{\Gamma_1}} \cong \underset{\pi_1(M_2)}{\underset{\shortparallel}{\Gamma_2}}} \iff M_1 \overset{(B)\ \text{homeo}}{\approx} M_2 \iff M_1 \overset{(C)\ \text{isom}}{\cong} M_2 \iff \overset{(D)}{\exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)},$$

т.что $\Gamma_2 = g\Gamma_1 g^{-1}$.

$$\left(\overset{(E)}{\iff} M_1 \overset{\text{homotopy}}{\simeq} M_2\right)$$

Очевидно: $D \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow E \Rightarrow A$

Crazy(?) Idea: $A \Rightarrow E \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$.

4 кита: Топология, геометрия, анализ, динамика = эргодическая теория — easy!

Схема

(A) $\varphi: \Gamma_1 \xrightarrow{\cong} \Gamma_2 \overset{(1)}{\longmapsto} M_1 \simeq M_2$ (f – smooth homotopy) $\overset{(2)}{\longmapsto}$ (E) $\tilde{f}: H^n \xrightarrow{\simeq} H^n$ – smooth homotopy – pseudo-isometry $\overset{(3)!}{\longmapsto}$ $\partial\tilde{f}: \partial H^n \xrightarrow{\cong} \partial H^n$ boundary homeo map (B)

$\overset{(4)}{\longmapsto}$ $\partial\tilde{f}: \underset{S^{n-1}}{\partial H^n} \to \underset{S^{n-1}}{\partial H^n}$ – K-quasi-conf $\longmapsto$ $\partial\tilde{f}$ дифф. п.в. $\longmapsto d(\partial\tilde{f})$ – K-quasi conf.

Part I: ★ $n=2$ не работ. д-во! брать

$\overset{(5)}{\longmapsto}$ $\Gamma \curvearrowright S^{n-1}$ эргодично и либо Howe-Moore thrm, либо теор. Хопфа–Аносова про эрг. геод. потоков на гиперб. мн-ях $\longmapsto K \equiv 1$ п.в. $\overset{(6)}{\longmapsto}$ $d(\partial\tilde{f})$ и $\partial\tilde{f} \in \mathrm{Conf}$ $\Rightarrow \tilde{f} \in \mathrm{Isom}(H^n)$ (C)

Лемма 1) $\mathrm{Isom}(H^n) = \mathrm{Conf}(\partial H^n) := \mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

2) $QI(H^n) = Q\mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

Опр а) Пусть (X, ρ) – метр. пр-во. Геодезическая в X = $\gamma: [a,b] \xrightarrow[\text{влож.}]{\text{изом!}} X$

б) Квазигеодезическая = $\tilde{\gamma}: [a,b] \hookrightarrow X$ – QI-вложение.

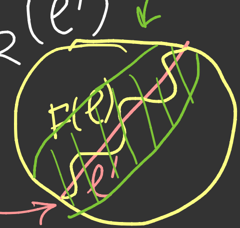
(Following Martelli "Intro to Geom Topol")

Теор. Псевдо-изом $F: H^n \to H^n$ продолжается до $F: \bar{H}^n \xrightarrow{\text{homeo}} \bar{H}^n$

Лемма (Morse–Mostow Lemma)

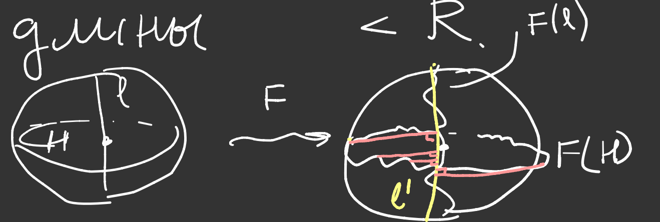
Пусть $F: H^n \to H^n$ – псевдо/квази-изом. Тогда $\exists R = \mathrm{const}(C_1, C_2) > 0$ т.ч. $\forall$ геод. $\ell \subset H^n$ $\exists!$ геод. ℓ': квазигеод. $F(\ell) \subset N_R(\ell')$

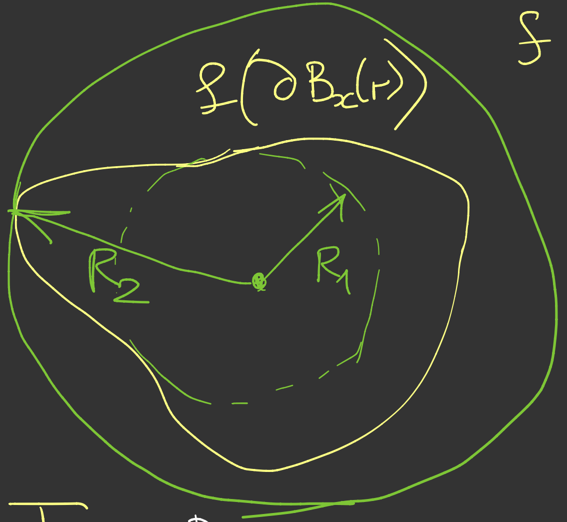
(геодезическое выпрямление квази-геодезической)



Лемма Пусть F – псевдо-изом. Тогда $\exists R > 0$: $\forall \ell$ и гиперпл-ти $H \perp \ell$ образ $F(H)$ при проекции на $\ell' \sim F(\ell)$ попадает на дугу длины $< R$.

геод. выпр.



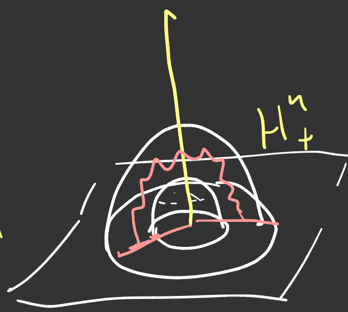


f - quasi-conf, если $\exists C>0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{R_2}{R_1} < C.$$

Обозн.: $f \in C$-QConf.

(Если $C=1$, то $f \in$ Conf)



Теор. Boundary map $\partial\tilde{f} \doteq \tilde{f}|_{\partial H^n} \in QConf(S^{n-1})$

Теор. Пусть $n\geq 3$. Тогда quasi-conf homeo $F: S^{n-1}\to S^{n-1}$ явл. дифф. п.в. Более того, d_xF равн. огр., т.е. $\exists \lambda>1$: $\forall$ п.в. $x\in S^{n-1}$ и $\forall v\in T_xS^{n-1}$ $1/\lambda \leq \frac{\|d_xF(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda$

Замечание При $n=2$ не выполнено усл-е про d_xF.

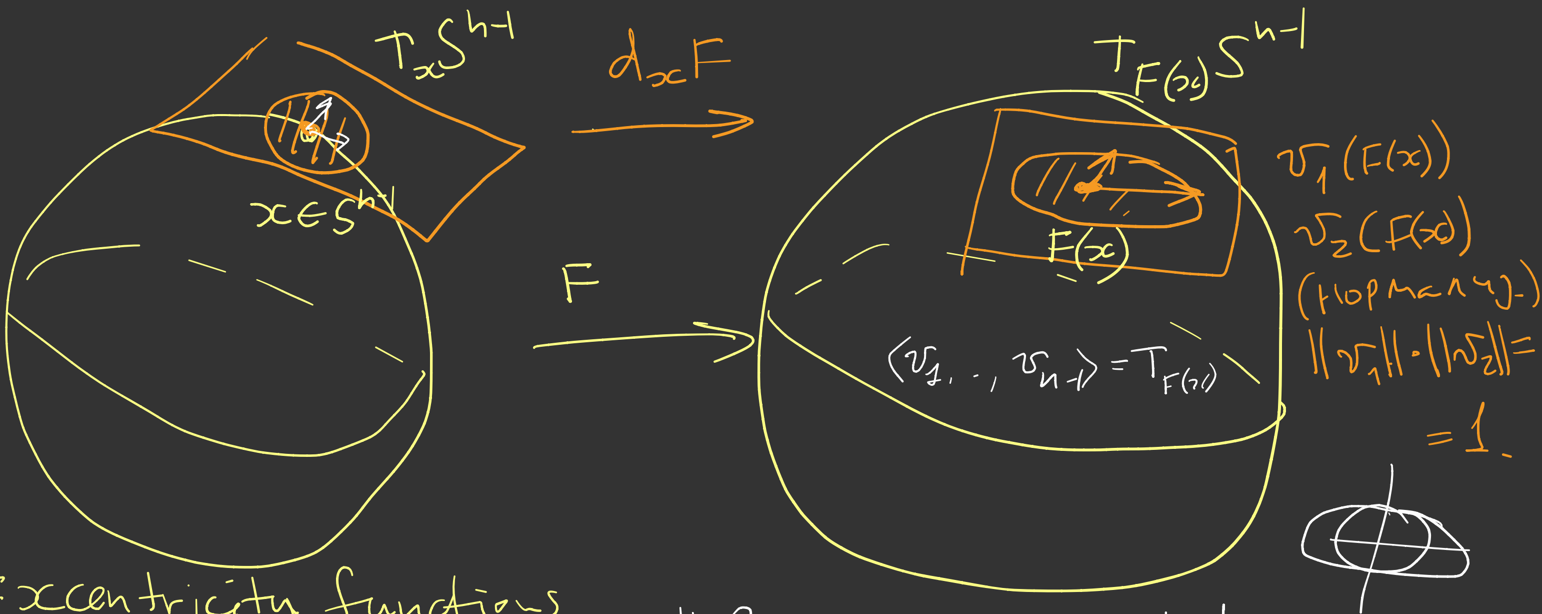
А именно, $\exists$ гомеоморфизмы S^1: $d_xF \equiv 0$.

Теор. (без док-ва).

1) Пусть $F\in Homeo(S^{n-1}) \cap C(S^{n-1})$. Тогда

$$F\in K\text{-}QConf(S^{n-1}) \iff dF \in K\text{-}QConf(TS^{n-1}).$$

2) $F\in QConf(S^{n-1})$ и $dF\in Conf(TS^{n-1}) \Rightarrow F \in Conf(S^{n-1})$.



Excentricity functions

$$e_F(x) = \max_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,..,n-1}} \left\{ \frac{\|v_i(F(x))\|}{\|v_j(F(x))\|} \right\} \quad \forall \text{ п.в. } x\in S^{n-1}.$$

Нам d_xF тогда $e_F(x)$ QConf.

Лемма $\Gamma \curvearrowright S^{n-1} = \partial H^n$ эргодично

Док-во: По теор. Howe-Moore, если $H < G$ некомп подгр., то $H \curvearrowright G/\Gamma$ эргод. По лемме из лекции 5, $H \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \underset{\text{эрг.}}{\curvearrowright} G/H$.
В данном случае применим эти рассуждения для $H = P$

Заметим, что $S^{n-1} = \partial_\infty H^n = G/P$, где $G = \mathrm{Isom}(H^n) = PO_{n,1}(\mathbb{R})$
$P = \mathrm{Isom}(E^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes O_{n-1}(\mathbb{R})$.
(явно не компакт)

Действительно,
$G \cong \mathrm{Conf}(S^{n-1})$; $G_\infty = \{(x,t) \mapsto (Ax+b, t) \mid A \in O_{n-1}(\mathbb{R}), (x,t) \in H^n, t > 0\}$.

Отсюда: Теор H-M $\Rightarrow P \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma \overset{\text{(лемма)}}{\Leftrightarrow} \Gamma \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} S^{n-1} = G/P$. $\boxtimes$

Заметим, что $e_{\gamma F} = e_F$, т.е. ф-ция $e_F(x)$ явл Γ-инв (для $\Gamma \curvearrowright S^{n-1}$).
В силу эргодичности, $e_F \equiv \mathrm{const}$ п.в.
Если $e_F \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 1$, то вопрос закрыт, т.к. тогда $dF \in \mathrm{Conf}$, $F \in \mathrm{Conf}$.

Пусть теперь $e_F \overset{\text{п.в.}}{\equiv} c > 1$. Тогда в эллипсоиде можно выбрать k наиболее длинных напр-й, причем $1 \le k < n-1$.
Заметим, что тогда имеется Γ-инв. k-мерная пл-ть $\mathcal{U}$, а значит, и целое расслоение над $\mathcal{U}$ явл Γ-инв.
Далее, $\mathrm{Gr}_k(T^1 S^{n-1}) = G/H_k$, где $A^+ < H_k < P$.

Здесь $H_k = G_{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U} < \{t=0\}$ (k-мерная плоскость). H_k некомпакт

Отсюда (снова по Теор H-M) имеем: $\Gamma \underset{\text{эргод.}}{\curvearrowright} G/H_k$. $\boxtimes$

② $SL_n(\mathbb{Z})$ - решетка в $SL_n(\mathbb{R})$

Теор (Зигель?) Пусть μ - мера Хаара на $G = SL_n(\mathbb{R})$, и пусть $\mathcal{L}_n := SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ — пространство унимод. решеток в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mu(\mathcal{L}_n) < +\infty$.
(частный случай теор Бореля – Хариш-Чандры 1962)

Док-во 1: Основано на построении области Зигеля (Siegel set).

Док-во 2 Основано на теореме Мура, теореме Дани-Маргулиса.

Пусть $u \in SL_n(\mathbb{R})$ – нетрив. унип. эл-т. Для всякого $x \in \mathcal{L}_n$ и компакта $C \subseteq \mathcal{L}_n$ положим

$$\rho_C(x) = \liminf_{m \to \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} \mid u^k x \in C\}}{m}$$

Теор (Дани-Маргулис)

Пусть $u \in SL_n(\mathbb{R})$ – унип., $x \in \mathcal{L}_n$. Тогда $\exists$ компакт $C \subseteq \mathcal{L}_n$, т.ч. $\rho_C(x) > 0$.

В силу теор. Д-М и того, что $\mathcal{L}_n$ можно покрыть счетным числом компактов, можно найти C: $\rho_C > 0$ на мн-ве полож. меры. (*)

Пусть $\chi_C = \mathbb{1}_C$ – характ. ф-ция мн-ва C. Тогда

$$\int_{\mathcal{L}_n} \rho_C \, d\mu \le \liminf_{m \to \infty} \int_{\mathcal{L}_n} \frac{\#\{k \in [m] \mid u^k x \in C\}}{m} d\mu(x) =$$

$$= \liminf_{m \to \infty} \frac{1}{m} \int_{\mathcal{L}_n} (\chi_{u^{-1}C} + \chi_{u^{-2}C} + \dots + \chi_{u^{-m}C}) \, d\mu =$$

$$= \liminf_{m \to \infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathcal{L}_n} \chi_{u^{-k}C} \, d\mu \right) =$$

$$= \liminf_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mu(u^{-k}C) = \mu(C) < \infty.$$

Таким образом, $\rho_C \in L^1(\mathcal{L}_n, \mu)$. Можно показать, что ρ_C является u-инвариантной, а значит по теор. Мура $\rho_C \equiv \underset{(*)}{const} > 0$ п.в. Тогда $\int_{\mathcal{L}_n} const \cdot d\mu = \int_{\mathcal{L}_n} \rho_C \, d\mu = const \cdot \mu(\mathcal{L}_n) < +\infty$. $\boxtimes$

3 Kazhdan's property (T)

Пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ – унит. пр-е лок-комп. топол. гр. G.

Если для всякого компакта $K \subseteq G$ и всякого $\varepsilon > 0$ $\exists$ единич. вектор $u \in \mathcal{H}$: $\|gu - u\| < \varepsilon$ $\forall g \in K$, то говорят, что G имеет **почти инвар. векторы**.

Свойств-(Т): Группа G имеет свойство Каждана (Т), если для всякого унит. пр-я, имеющего почти инвар. векторы, существ. и настоящие инв. векторы.

Теор (Каждан)
Пусть G – связная п/п гр. Ли (с конечным центром), все факторы которой имеют $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \geq 2$. Тогда G имеет свойство (Т).
В частн, $SL_n(\mathbb{R})$ имеет св-во (Т) при $n \geq 3$.

Опр/Теор Группа G аменабельна (amenable) $\Leftrightarrow$ $L^2(G)$ имеет почти инвар. векторы

Предл. Пусть G – гр. Ли. Тогда G – компактна $\Leftrightarrow$ G is amenable и имеет св-во Каждана (Т).

Задача (Эргодичность?)

Предл. Пусть Γ – дискр. группа со свойством (Т).
Тогда
1) Γ/Λ имеет св-во (Т)
2) $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ – конечная группа
3) Γ – конечно порождена.

Следствие F_n не имеет св-ва (Т) при $n \geq 2$.

Теор (Каждан; частный случай для $G = SL_3(\mathbb{R})$).
$G = SL_3(\mathbb{R})$ обладает свойством (Т).

Док-во Пусть $R = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$.

$$H = SL_3(\mathbb{R}) \supset \left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Лемма Пусть $\rho: H \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ (унит. пр-е), имеющее почти инвар. вектор. Тогда $\exists v \neq 0$ инвар. относ. $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ (унит. пр-е), тогда $\rho|_H$ имеет почти инв векторы (следует из того, что $\rho(G)$ имеет п. ив.)

Тогда $\exists v \neq 0$, инв-й относ. $R \cong \mathbb{R}^2$. По теор. Мура вектор v неподв. для всей группы G. $\boxtimes$

Предл. Группа $SL_2(\mathbb{R})$ не обладает св-вом (T).

Док-во. Пусть $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ – решетка torsion free $\Rightarrow$ H^2/Γ – гипербол. пов-ть.

Тогда Γ либо $\pi_1(S_g)$, либо $\Gamma = F_n$ – свободная неабелева группа.

В обоих случаях $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ бесконечен, т.е. Γ не обладает св-вом (T). Из следующей теор. все следует. $\boxtimes$

Теор. Пусть G – группа Ли со св-вом (T); $\Gamma < G$ реш. Тогда Γ обладает св-вом (T).