Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:
- Dave Morris "Ratner's Theorems ..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures..")
- Alex Furman ("Lectures on..")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории - 1

IV. Основы эргодической теории - 2

V Эргодические действия групп

VI Эргодические теоремы: Hopf, Moore and Howe - Moore

VII Теоремы Howe - Moore в более общем случае.

Теор. (Moore Ergodicity Theorem)

Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_s$ - связная полупростая группа Ли без центра, где G_j - связные простые группы Ли (т.е. $\mathfrak{g}_j := Lie(G_j)$ не имеет нетрив. идеалов $\Updownarrow$ однод. $\tilde{G}_j$ не имеет нетрив. непр. норм. подгрупп)

Пусть $\Gamma < G$ - решетка и $H < G$ явл. замкнутой некомп. подгруппой.

Тогда $H \curvearrowright G/\Gamma$ эрг. ($\overset{\text{по 1.2.}}{\Longleftrightarrow}$ **Сл.:** $\Gamma \curvearrowright G/H$)

Замеч. Была доказана для $G = PSL_2(\mathbb{R})$.

Теор. (Howe–Moore Vanishing / Decay Theorem).

Пусть G – связная простая гр. Ли без центра; $\mathcal{H}$ – гильбертово пр-во, и пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ – унитарное представление, такое что не сущест. $v \neq 0$ инв. отн. $\rho(G)$ (т.е. $\rho(G)v \neq v$ для всех $v \in \mathcal{H}$). Пусть при этом $\{g_n\} \subset G$, где $\|g_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\langle \rho(g_n) \cdot \varphi, \psi \rangle \to 0 \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Пример (унитарное представление)

Пусть G – простая гр. Ли, $\Gamma < G$ – решетка, μ – мера Хаара на G/Γ. Тогда $\mu(G/\Gamma) < +\infty$. Следовательно, $\left|\int_{G/\Gamma} \varphi(x)\, d\mu\right| \leq \left(\int_{G/\Gamma} \varphi^2(x)\, d\mu\right)^{1/2} \sqrt{\mu(G/\Gamma)}$.

Значит, если $\varphi \in L^2(G/\Gamma)$, то $\varphi \in L^1(G/\Gamma)$ (для $\mu(X) = +\infty$ это м.б. неверно).

Построим представление $\rho: G \to \mathcal{U}(L^2(G/\Gamma))$; $g \mapsto \rho(g) \curvearrowright L^2(G/\Gamma)$, где $g \circ u(x) = u(g \cdot h\Gamma)$, $x = h\Gamma$. Это унит. предст. авл.:

$$\langle g \circ u, g \circ v \rangle = \int_{G/\Gamma} u(gx)\, v(gx)\, d\mu = \int_{g(G/\Gamma)} u(gx)\, v(gx)\, \mu(d(gx)) = \int_{G/\Gamma} u(x')\, v(x')\, d\mu = \langle u, v \rangle.$$

Более того, все $u(x) \equiv \mathrm{const}$ являются инвариантными для $\rho(G)$.

Остается проверить, что $\mathcal{H} = 1^{\perp} = \{ f \in L^2(G/\Gamma) \mid \int_{G/\Gamma} f(x)\, \mu(dx) = 0 \}$ не имеет нетрив. G-инв. векторов. Задача 1...

Ув. Теор. Мура следует из теор. Хове–Мура.

Док-во: Действ., если $u(x) \in \mathcal{H}$ – H-инв. ф-ция, то $h \circ u(x) = u(x)$. Т.к. H не компактна, то $\exists h_n \to \infty$: $\langle \rho(h_n) u, u \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2_{L^2} \to 0$. След., $u \equiv 0$ п.в. (это все const в $\mathcal{H}$) ▨

Док-во теор. Хове–Мура для $G = SL_d(\mathbb{R})$

Шаг 1 Разложение Картана $G = KA^+K$, где $K = SO_d(\mathbb{R})$,

$$A^+ = \{ \mathrm{diag}(e^{t_1}, \ldots, e^{t_d}) \mid t_1 + \ldots + t_d = 0,\ t_1 \geq \ldots \geq t_d \}.$$

Далее повторяем предыдущее доказательство (про $\lim_n |f_{x_n y_n}(a_n)| = \lim_n |\langle \rho(a_n) x_n, y_n \rangle| \geq \varepsilon_0 > 0$)

Шаг 2.

Лемма (Маутнер)

Пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ и $\exists a_n, h \in G$: $a_n^{-1} h a_n \to e$ в G.
Если $y, z \in \mathcal{H}$ – такие векторы, что $\rho(a_n)x \xrightarrow{\text{слабо}} z$, тогда
$\rho(h)z = z$. В частн, если $\rho(a_n)z = z$, то $\rho(h)z = z$.

Строим z и доказываем теор для $SL_2(\mathbb{R})$

Шаг 3 (для $SL_d(\mathbb{R})$)

Для всех k, l, $1 \le k < l \le d$, рассм. образы $G_{k,l}$ вложений

$$\tau_{k,l}: SL_2(\mathbb{R}) \to SL_d(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} & k & & l & \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \\ k \\ l \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha & & \beta & \\ & & 1 & & \\ & \gamma & & \delta & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in SL_d(\mathbb{R}).$$

Для $i \ne j$ $H_{i,j} = \left\{ \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$. Заметим, что $H_{k,l} < G_{k,l}$, причем

$H_{k,l} = \tau_{k,l}(H)$, где $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$ – орициклич группа.

Пусть $\rho: G = SL_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ – унит пр-е $\underbrace{}_{\text{без нетрив. } \rho(G)\text{-инв векс.}}$ с $f_{u,v}(g) \not\to 0$ при $g \to \infty$.
Тогда $\exists \{a_n\} \subset A^+$ и векторы $x, z \ne 0$: $\rho(a_n)x \xrightarrow{w} z$. Заметим, что

$a_n = \mathrm{diag}(e^{t_{1,n}}, \dots, e^{t_{d,n}})$, где $t_{1,n} + \dots + t_{d,n} = 0$, $t_{1,n} \geq \dots \geq t_{d,n}$

Можно считать, что $t_{k,n} - t_{l,n} \to +\infty$ для фикс $k < l \le d$. Тогда
для всякого $h \in H_{k,l}$ имеем $a_n^{-1} h a_n \to e$ и по л. Маутнера $z \in \mathcal{H}^{\rho(H_{k,l})}$.
Ограничив $\rho|_{SL_2(\mathbb{R}) = G_{k,l}}$, получаем, что $z \in \mathcal{H}^{\rho(G_{k,l})}$. В частности,
z неподвижен отн. $a^n_{(k,l)} = \tau_{k,l}(\mathrm{diag}(e^n, e^{-n})) = (1, \dots, e^n, 1, \dots, 1, e^{-n}, 1, \dots, 1) \in SL_d(\mathbb{R})$

По лемме Маутнера z неподв. для всех $\rho(H_{k,j})$, где
$j \ne k$, поскольку $\forall h \in H_{k,j}$: $a_{k,l}^{-n} \cdot h \cdot a^n_{k,l} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, если $k < j$.
(если $k > j$, то $\lim\limits_{n \to -\infty} = 1$). Аналогично сделав для всех
$k \le d$, получаем, что z неподв. для всех $\rho(H_{k,l})$, где $k \ne l$.
Поскольку $G = SL_d(\mathbb{R}) = \langle H_{k,l} \mid k \ne l \rangle$, то $\overset{\ne 0}{z} \in \mathcal{H}^{\rho(G)}$ (противоречие) ☒

Шаг 4 Идея док-ва в общем случае для связной п/п гр. Ли G.

Можно считать, что $\exists$ алгебр. $\mathbb{R}$-группа $\tilde{G}$: $\tilde{G}(\mathbb{R})^\circ \cong G$.

Известно, что если $T < G$ – макс. расщ. тор, то

$$Lie(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha, \text{ где } \alpha \in \mathfrak{X}(T) \text{ – характеры (корни)},$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid ad(h)x = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

$$\mathfrak{h} = Lie(T).$$

Теор. Пусть α – корень для $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^{\text{"}Lie(T)\text{"}})$.

1) $\mathfrak{g}_\alpha$ и $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ – 1-dim в $\mathfrak{g}$.

2) $\exists\, h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha^{!!}$: $\alpha(h_\alpha) = 2$

3) $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \ \exists!\, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$: $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$; $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$; $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$.

Таким образом $S_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ – копия $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в $\mathfrak{g}$.

Таким образом, существует $\tau_\alpha : S_\alpha = SL_2(\mathbb{R}) \to G$.

Далее, пусть A – макс. $\mathbb{R}$-расщ. тор, тогда $\exists\, G^+$ – п/п $\mathbb{R}$-расщ. подгр, т.что $A \subset G^+ \subset G$, и A также явл. макс. расщ. тором. Затем берется макс. лин-нез. мн-о S положит. корней G' отн. A, такая, что при $\alpha, \beta \in S$ имеем $\alpha+\beta$ не явл. корнем. Тогда прямая сумма корневых подпр-в $= Lie(B)$, где B – абелева, $B \subset G'$, $\dim B = \dim A$ и $aBa^{-1} = B$ для $a \in A$.

Напр., для $G = SL_d(\mathbb{R})$ можно получить $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b_1 \ldots b_{d-1} \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{R}^{d-1}$.

Затем остается исследовать представления $H = AB$ аналогично случаю $G = SL_d(\mathbb{R})$: за счёт копий $SL_2(\mathbb{R})$ (см. группы S_α) можно показать, что будет какой-то неподв. нетрив. вектор для 1-dim подгр. $A_0 \subset A$, и тогда G порожд. эл-тами, которые либо коммутируют с A_0, либо лежат в соотв. копии $P = AN$ (для P надо доказать, что если $\pi : P \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ – унит. пр-е, то либо $\pi|_N$ имеет нетрив. инв. векторы, либо $\langle \pi|_A u, v\rangle \to 0$ на ∞ — в любом случае противоречие).