Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:

- Dave Morris "Ratner's Theorems ..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures...")
- Alex Furman ("Lectures on...")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории-1

IV. Основы эргодической теории-2

V Эргодические действия групп

VI Эргодические теоремы: Hopf, Moore and Howe-Moore

Теор. (Moore Ergodicity Theorem)

Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_s$ – связная полупростая группа Ли без центра, где G_j – связные простые группы Ли (т.е. $\mathfrak{g}_j := Lie(G_j)$ не имеет нетрив. идеалов $\Leftrightarrow$ односв. накр. $\tilde{G}_j$ не имеет нетрив. норм. подгрупп).

Пусть $\Gamma < G$ – решетка и $H < G$ явл. замкнутой некомп. подгруппой.

Тогда $H \curvearrowright G/\Gamma$ эрг. $\left(\overset{\text{по 1.2. Сл.:}}{\Longleftrightarrow} \Gamma \curvearrowright G/H\right)$

Замечание: Наглядный частный случай:

$G = PSL_2(\mathbb{R}) = Isom^+(\mathbb{H}^2)$; $\Gamma < G$ – решетка; $\mathbb{H}^2/\Gamma$ – гиперболич. поверх-ть

γ^t – геодезический поток на $\mathbb{H}^2/\Gamma$ (в данном случае γ^t – 1-пар. подгр.)

Рассмотрим частную ситуацию:

$G = PSL_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$;

$\Gamma < G$ – решетка;

$M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ – гиперб. пов-ть кон. объема;

$T^1 M \cong G/\Gamma$

Теор. (Хопф = частный сл. теор. Мура).
Пусть g^t – 1-параметр. подгр. в $G = PSL_2(\mathbb{R})$; и пусть $\overline{\{g^t\}}$ – некомпактно. Тогда $g^t \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma$. Отсюда, в частн., следует, что геодезический поток γ^t и орицикл. поток h^t действ. эргодично на поверхности $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$.

Идея док-ва: Основано на (а) разложении Картана $G = KA^+K$, где K – максим. компактная подгруппа (в нашем случае $K = SO_2(\mathbb{R})$), A^+ – группа диагон. матриц с положе. эл-тами и $\det(a) = 1$ $\forall a \in A^+$.

(б) теор. Хове–Мура об исчез. коэффициентах для $G = SL_2(\mathbb{R})$ (причем пункт (б) выводится из (а)).

Док-во: Шаг 1 Разложение Картана: $G = KA^+K = KP$
разложение Ивасавы: $G = KAN$, где
K - макс. комп. подгр., $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ – макс. абелева подалгебра, и $\mathfrak{n}$ – нильп. алгебра Ли, полученная через положе. систему корней.
В нашем случае, $K = SO_2(\mathbb{R})$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0 \right\}$, $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}$,

$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 1 \right\}$; $\mathrm{Lie}(A^+) = \mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Известно, что для группы (строго-) верхнетреуг. матриц $\begin{pmatrix} 1 & & x_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ имеем (мера Хаара)

$d\mu = \prod_{i<j} dx_{ij}$ (т.е. просто мера Лебега на $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$) $= dx_{12} \wedge dx_{23} \wedge \dots$

Тогда $d\mu_K = d\theta$, где $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$; $d\mu_A = \dfrac{da}{a}$; $d\mu_N = db$.

Значит, $d\mu_{PSL_2(\mathbb{R})} = d\mu_K \times d\mu_A \times d\mu_N = \frac{1}{a}\, da\, db\, d\theta$

Эта мера Хаара на $T^1H^2 \simeq PSL_2(\mathbb{R})$ индуц. единств. лок.-кон. меру на $T^1M \simeq PSL_2(\mathbb{R})/\Gamma$.

Шаг 2 (докажем теор. об исчез. коэфф для $G = PSL_2(\mathbb{R})$)

Теор. (Howe–Moore **Vanishing**/Decay theorem).

Пусть G — связная простая гр. Ли без центра; $\mathcal{H}$ — гильбертово пр-во, и пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ — унитарное представление, такое что не сущест. $v \neq 0$ инв. отн. $\rho(G)$ (т.е. $\rho(G)v \neq v$ для всех $v \in \mathcal{H}$). Пусть при этом $\{g_n\} \subset G$, где $\|g_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$\langle \rho(g_n)\cdot\varphi, \psi \rangle \to 0$ для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

Замеч: В усл. теор. $g_n \to g$ в $G \iff \|\rho(g_n)x - \rho(g)x\| \to 0$ для всякого $x \in \mathcal{H}$.

Замеч2. Какие могут быть унитарные представления? Какое взять пр-во $\mathcal{H}$?

Пусть H — группа Ли; $H \curvearrowright X$ — измер., метр., лок. комп. Тогда существует унит. предст. H в гильб. пр-ве $L^2(X,\mu)$: $(\pi(h)\varphi)(x) = \varphi(h^{-1}x)$.

Задача: $\pi: H \to \mathcal{U}(L^2(X,\mu))$ — унитарно и не имеет нетрив. инв. векторов!

Итак, пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ — унит пред. и пусть матр. коэфф. $f_{\varphi,\psi}(g_n)$ (для каких-то φ и ψ) не исчезают, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0 : \exists \{g_n\}$:

$|f_{\varphi,\psi}(g_n)| = |\langle \rho(g_n)\varphi, \psi \rangle| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Шаг 2.1 Переход к Картановской компоненте A^+.

Воспользуемся разл. Картана $G = KA^+K$: $g_n = k_n^{-1} a_n r_n$, где $k_n, r_n \in K$, $a_n \in A^+$. Т.к. K явл компактом, то м.сч., что $k_n \to k \in K$, $r_n \to r \in K$. Тогда (в силу непр. пр-я ρ)

$x_n = \rho(r_n)\varphi \to \rho(r)\cdot\varphi = x$; $y_n = \rho(k_n)\psi \to y = \rho(k)\cdot\psi$.

Имеем: $f_{x_n y_n}(a_n) = \langle \rho(a_n) x_n, y_n \rangle = \langle \rho(a_n r_n)\varphi, \rho(k_n)\cdot\psi \rangle =$

$$= \langle \rho(k_n^{-1} a_n r_n)\varphi, \psi \rangle = f_{\varphi,\psi}(g_n).$$

Отсюда: $|f_{x_n y_n}(a_n) - f_{x,y}(a_n)| \le | f_{x_n y_n}(a_n) - f_{x, y_n}(a_n)| +$

$+ | f_{x,y_n}(a_n) - f_{x,y}(a_n)| = |\langle \rho(a_n)(x_n - x), y_n \rangle| +$

$+ |\langle \rho(a_n) x, y_n - y \rangle| \le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$, т.к.

$\|y_n\| = \|y\|$ и $\|x_n\| = \|x\|$ для всех n.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} | f_{x,y}(a_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} |\langle \rho(a_n) x_n, y_n \rangle| \ge \varepsilon_0 > 0$.

(Заметим, что $g_n = k_n^{-1} a_n r_n \to \infty$, то $a_n \to \infty$).

Шаг 2.2 Лемма Маутнера (Mautner's Phenomenon).

В гильб. пр-ве $\mathcal{H}$ всякий замкн. шар слабо компактен. В частн., м.сч. (перейдя к подпосл-ти), что посл-ть $\{\rho(a_n)x\}$ векторов равной длины сходится (слабо = weakly) к z:

$\forall v \in \mathcal{H}$ $\langle \rho(a_n)x, v \rangle \to \langle z, v \rangle$. Ясно, что $z \neq 0$.
(т.к. $|\langle z, y\rangle| = \lim\limits_n |\langle \rho(a_n) x, y\rangle| \ge \varepsilon_0 > 0$.)

<u>Цель</u>: показать, что $z \in \mathcal{H}^{\rho(G)}$ (т.е. инвар, что дает противоречие).

Лемма (Маутнер)

Пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ и $\exists\, a_n, h \in G:\ a_n^{-1} h a_n \to e$ в G.
Если $y, z \in \mathcal{H}$ — такие векторы, что $\rho(a_n)x \xrightarrow{\text{слабо}} z$, тогда $\rho(h)z = z$. В частн., если $\rho(a_n)z = z$, то $\rho(h)z = z$.

Док-во леммы

$$\|\rho(ha_n)x - \rho(a_n)x\| = \|\rho(a_n^{-1}ha_n)x - x\| \to 0.$$

В то же время $\rho(a_n)x \xrightarrow{\text{слабо}} z$ и $\rho(ha_n)x \xrightarrow{\text{слабо}} \rho(h)z$. След., $\rho(h)z = z$ $\blacksquare$

Шаг 2.3 Завершение док-ва теор. об исчез. коэф. для $G = PSL_2$.

В силу шага 1 имеем $a^{t_n} := \begin{pmatrix} e^{t_n} & 0 \\ 0 & e^{-t_n} \end{pmatrix} \in A^+$, где $t_n \to +\infty$, и $x, z \in \mathcal{H} \setminus \{0\}:\ \rho(a^{t_n})x \xrightarrow{w} z$. Рассмотрим орициклич. подгруппу $H = \left\{ h^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ ($= N$ в разл. Ивасавы).
Она нормализуется диаг. подгр. A и для всякого $h^s \in H$ имеем:
$a^{-t_n} \cdot h^s a^{t_n} = h^{(e^{-2t_n} \cdot s)} \to 1$ при $t_n \to \infty$. По л. Маутнера ненулевой z явл. $\rho(H)$-инв, т.е. $z \in \mathcal{H}^{\rho(H)}$.

Матр. функция $f_{z,z}(g) = \langle \rho(g)z, z \rangle$ — непр на G и би-H-инв:

a) $f_{z,z}(gh) = \langle \rho(g)\rho(h)z, z \rangle = \langle \rho(g)z, z \rangle = f_{z,z}(g)$

b) $f_{z,z}(hg) = \langle \rho(g)z, \rho(h^{-1})z \rangle = \langle \rho(g)z, z \rangle = f_{z,z}(g)$

для всех $g \in G$ и $h \in H$.

По a) ф-ция $f_{z,z}: G \to \mathbb{C}$ дает $\tilde{f}_{z,z}: G/H \to \mathbb{C}$, кот. H-инв. для $H \curvearrowright G/H$ слева. Заметим, что $G/H = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, где $H \curvearrowright G/H$: $h^s(x,y) = (x+sy, y)$. Тогда $\tilde{f} \equiv c_y$ на каждой горизонт. линии $l_y = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}\}$ для $y \neq 0$.
По непр., $\tilde{f} \equiv c_0$ на проколотой оси x: $\{(x,0) \mid x \neq 0\}$.

Поскольку $\tilde{f}(1,0) = f_{z,z}(e) = \|z\|^2$, то мы имеем:

$\|z\|^2 = \tilde{f}(e^{2t}, 0) = \langle \rho(a^t)z, z\rangle$, где $t \in \mathbb{R}$ и $a^t = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t}) \in A$.

Отсюда следует, что z — $\rho(A)$-инв. Следовательно, z инв относит верхне-треуг подгр. $AH = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & s \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Тогда $f_{z,z}$ и $\tilde{f}$ проецируются в $\tilde{\tilde{f}}$ на $G/_{AH} \simeq P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \cup \infty$, где $G \curvearrowright \mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \infty$ дробно-лин. преобр-ми (в частн., $h^s : x \mapsto x + s$)

Поскольку $\tilde{\tilde{f}}$ инвар. отн. этого действия H и H-орб т. 1 плотна, то тогда $\tilde{\tilde{f}} \equiv \mathrm{const}$. Тогда постоянны функции $f_{z,z} : G \to \mathbb{C}$ и $\tilde{f} : G/H \to \mathbb{C}$. Отсюда:

$\langle \rho(g) z, z \rangle = f_{z,z}(g) = f_{z,z}(e) = \|z\|^2$, где $z \neq 0$.

По нер-ву Коши-Бун-ШВ, получаем, что $z \in \mathcal{H}^{\rho(G)}$.

(Теор. об исчезающих коэф. доказана для $SL_2(\mathbb{R})$).

Шаг 3. $(X, \mu) = (G/\Gamma, \mu_\Gamma)$ с действием G след обр.:

$g : h\Gamma \to gh\Gamma$. Рассмотрим в $L^2(X, \mu)$ ортог. дополн к пост. ф-циям $\mathcal{H} = 1^\perp = \{ f \in L^2(G/\Gamma; \mu) \mid \int f d\mu = 0 \}$.

Тогда (по задаче 1): $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $(\rho(g) f)(h\Gamma) = f(g^{-1}h\Gamma)$, — унитарное пр-е без нетрив. инв. векторов.

По теор. Хове-Мура для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$:

$\lim_n \langle \rho(g_n)\varphi, \psi \rangle \to 0$, т.е. $\lim_{t \to \infty} \int_{G/\Gamma} \varphi(x g^t) \psi(x) d\mu = 0$.

Тогда всякая H-инв. $f \in L^2(G/\Gamma)$ будет пост. п.в., поскольку $\langle f, hf \rangle = \langle f, f \rangle$ для всех $h \in H$.