Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:

- Dave Morris "Ratner's Theorems ..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures...")
- Alex Furman ("Lectures on...")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории-1

IV. Основы эргодической теории-2

V Эргодические действия групп

① Эргодичность действий и плотность орбит

Пусть $H \curvearrowright X$, где (X,μ) – изм. пр-во (со счетной базой); и μ явл. H-инв.

Тогда $\curvearrowright$ эргодично, если всякая H-инв. μ-изм. ф-ция $\equiv \text{const}$ μ-пв.

$$\Updownarrow$$

$$HU = U \Rightarrow \mu(U) = 0 \text{ или } \mu(X \setminus U) = 0.$$

Лемма 1. $H \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} X \Rightarrow$ μ-почти все орбиты Hx плотны в $\operatorname{supp}(\mu)$. $(\mu(X \setminus \{x \in X \mid Hx \text{ плотна}\}) = 0)$.

Док-во: Можно считать, что $\operatorname{supp}(\mu) = X$.

Если $\mu(U) \neq 0$, то $\mu(HU) \neq 0$. Более того, $HU = U'$ явл. H-инв $\Rightarrow \mu(X \setminus U') = 0$.

Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где $\mu(U_i) > 0$.

Тогда $\mu(HU_i) > 0$ и $\mu(X \setminus HU_i) = 0$. Следовательно,

$$\mu\Big(X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} HU_i}_{V}\Big) = 0.$$

Данное мн-во явл. мн-вом точек с неплотными орбитами. Действ., для всякого $x \in V$ и всякого $i \geq 1$ сущ. $h \in H$: $x \in h^{-1}(U_i)$. Таким образом, для всех $x \in V$ верно, что орбита Hx плотна в X. ▨

$$\Big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} HU_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus HU_i)$$

Лемма 2 Пусть G — лок.комп. топ. гр. (напр., гр. Ли), и пусть $H_1, H_2 \subset G$ — замкн. подгруппы. Тогда

$$\underset{\text{эргод.}}{H_1 \curvearrowright G/H_2} \iff \underset{\text{эрг.}}{H_2 \curvearrowright G/H_1} \quad \Big(\text{Идея док-ва: } \iff \underset{\text{эргод.}}{H_1 \times H_2 \curvearrowright G}\Big)$$

Док-во:

$$\begin{tikzcd} & (G;\mu) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ (H_1\backslash G;\mu_1) & & (G/H_2;\mu_2) \end{tikzcd}$$

$H_2 \curvearrowright ?$ на $(H_1\backslash G;\mu_1) \supset U$; $H_1 \curvearrowright (G/H_2;\mu_2)$.

Пусть $H_1 \curvearrowright G/H_2$ эрг. и пусть $U \subset H_1\backslash G$ явл. H_2-инв. подмн-вом. Тогда $\pi_1^{-1}(U)$ инв. отн. правого действия H_2 и левого действия H_1.

Действ., $U' := \pi_1^{-1}(U)$, где $U = \{h_1 U' \mid h_1 \in H_1\}$.

Знаем, что $U \cdot h_2 = U = \{h_1 U' h_2 \mid h_1 \in H_1\}$.

Если $U'' = h_1' U' h_2'$, то $\pi_1(U'') = U$, т.к. U — h_2-инв. $\forall h_2 \in H_2$. След., $U'' \subset U'$, но легко показать и обратн., т.е. $U' = U''$.

$$G/H_2 = \{Gh_2 \mid h_2 \in H_2\}$$
$$H_1\backslash G = \{h_1 G \mid h_1 \in H_1\}$$
$$\mu = \mu|_{H_2} \times \mu_2 = \mu_{H_1} \times \mu_1$$

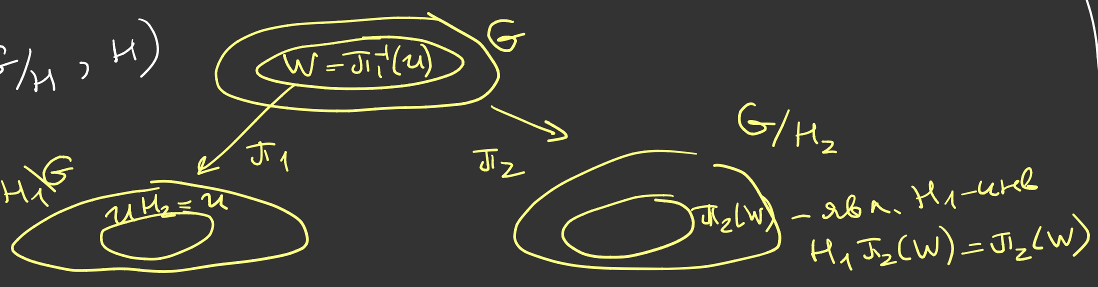
Тогда $\pi_2(\pi_1^{-1}(U))$ — инвар. отн левого действия H_1. След., $\mu(\pi_2(\pi_1^{-1}(U))) = 0$ или (в силу эргод. $H_1 \curvearrowright G/H_2$)

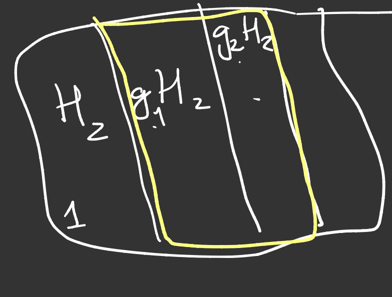
$$\mu(G/H_2 \setminus \pi_2\pi_1^{-1}(U)) = 0.$$

Отсюда следует, что $H_1 \times H_2 \curvearrowright G$ — эргодично. Действ, тогда $\mu_G(\pi_1^{-1}(U)) = 0$ в силу того, что $\mu_G(W \subset G) = \mu_2(W/H_2) \cdot \mu_G|_{H_2}$? $= \mu_2(W/H_2)\,\mu_G(H_2)$.

(Надо взять $W = \pi_2^{-1}(\pi_2\pi_1^{-1}(U)) = \pi_1^{-1}(U)$, т.е. $\pi_1(W) = U$)

$(G/H, H)$





Таким образом $\underset{\pi_1^{-1}(u)}{W} = \mathcal{U}' = \bigcup_{\alpha \in A} (g_\alpha H_2)$. При этом $H_1 W = W$.

Тогда $\mu_G(W) = \mu_G(H_2) \cdot \left(\int 1_{W/H_2} \, d\mu_2 \right) = \mu_G(H_2) \cdot \mu_2(\pi_2(W))$

Отсюда $\mu_2(W) = 0 \iff \mu_2(\pi_2(W)) = 0$ и

$$\mu_G(G \setminus W) = 0 \iff \mu_2(G/H_2 - \pi_2(W)) = 0.$$

Аналогично работает с проекцией на H_1.

Фактически мы доказали, что $H_2 \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/H_1 \iff H_1 \times H_2 \underset{\text{эрг.}}{\curvearrowright} G$ $\boxed{\text{ч}}$

② Эргодические теоремы: Хопфа, Мура и Хове-Мура

Теор. (Moore Ergodicity Theorem)

Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_s$ – связная полупростая группа Ли без центра, где G_j – связные простые группы Ли (т.е. $\mathfrak{g}_j = Lie(G_j)$ не имеет нетрив. идеалов $\Updownarrow$ односв. $\tilde{G}_j$ не имеет нетрив. норм. подгрупп)

Пусть $\Gamma < G$ – решетка и $H < G$ явл. замкнутой неком. подгруппой.

Тогда $H \underset{\text{эрг.}}{\curvearrowright} G/\Gamma$ $\left(\overset{\text{по 1.2. Сл.:}}{\iff} \Gamma \curvearrowright G/H \right)$

Теор. (Howe-Moore Vanishing / Decay Theorem).

Пусть G – связная простая гр. Ли без центра; $\mathcal{H}$ – гильбертово пр-во, и пусть $\rho: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ – унитарное представление, такое что не сущест. $v \neq 0$ инв. отн. $\rho(G)$ (т.е. $\rho(G) v \neq v$ для всех $v \in \mathcal{H}$). Пусть при этом $\{g_n\} \subset G$, где $\|g_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\langle \rho(g_n) \varphi, \psi \rangle \to 0 \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Замеч: В цел. теор. $g_n \to g$ в $G \iff \|\rho(g_n) x - \rho(g) x\| \to 0$ для всякого $x \in \mathcal{H}$.

Рассмотрим частную ситуацию:

$G = PSL_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$;

$\Gamma < G$ – решетка;

$M = \mathbb{H}^2/\Gamma$ – гиперб. пов-ть кон. объема;

$T^1 M \cong G/\Gamma$

Теор. (Хопф = частный сл. теор. Мура).

Пусть g^t – 1-параметр. подгр. в $G = PSL_2(\mathbb{R})$; и пусть $\overline{\{g^t\}}$ – некомпактно. Тогда $g^t \curvearrowright_{\text{эрг.}} G/\Gamma$. Отсюда, в частн., следует, что геодезический поток γ^t и орицикл. поток h^t действ. эргодично на поверхности $M = \mathbb{H}^2/\Gamma$.

Док-во: Основано на разложении Картана

$G = KA^+K$, где K – максим. компактная подгруппа (в нашем случае $K = SO_2(\mathbb{R})$), A^+ – группа диагон. матриц с полож. эл-тами и $\det(a) = 1$ $\forall a \in A^+$.