Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (Сколтех & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники: Dave Morris "Ratner's Theorems..."
Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
Curtis McMullen ("Lectures..")
Alex Furman ("Lectures on..")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, еще 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории - 1

IV. Основы эргодической теории - 2

Источник: Богачев В.И. "Основы теории меры", том 2, глава 10.

① Условные математические ожидания.

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пр-во с $\mu \geq 0$, и $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ - σ-подалг.

Опр. Пусть $f \in L^1(\mu)$. Условным матожиданием функции f отн. σ-подалг. $\mathcal{B}$ и меры μ называется такая $\mathcal{B}$-изм μ-интегр. ф-ция $E_\mu(f|\mathcal{B})$, что
$$\int_X gf\,d\mu = \int_X g\,E(f|\mathcal{B})\,d\mu$$
для всякой огран. $\mathcal{B}$-изм. ф-ции g.

Обозначения: • $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = E_\mu^{\mathcal{B}}(f) = E_\mu(f|\mathcal{B})$.

• Вероятностное усл. матож. $E(\xi|\eta) := E(\xi|\sigma(\eta))$.

Лемма. эквив. опр-е: $\int_U f\,d\mu = \int_U \mathbb{E}(f|\mathcal{B})\,d\mu \quad \forall U \in \mathcal{B} \quad (g = 1_U)$.

Примеры: 1) Если $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$, то $E(f|\mathcal{B}) = \int_X f\,d\mu$.

2) Пусть μ - вероятн. мера, $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} U_j$, где $\mu(U_j) > 0$. Пусть $\mathcal{B} = \sigma(\{U_j\})$.
Тогда $E(f|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{U_j} f\,d\mu\right) \cdot \frac{1_{U_j}(\omega)}{\mu(U_j)}$.

Док-во: Заметим, что $\mathcal{B}$-изм. ф-ции $\equiv \mathrm{const}_j$ на U_j.

Поэтому дост. проверить равенство интегралов при умнож. на 1_{U_j}.
По опред. $\int 1_{U_j} E(f|B)\,d\mu = \int_{U_j} f\,d\mu$, а последнее равно $\int$(правая часть $\cdot 1_{U_j}$), т.к. $U_i \cap U_j = \varnothing$ для всех i и j. ☒

Теорема (существование и основные св-ва усл. матожид.)

Пусть μ – вероятн. мера. Каждой $f \in L^1(\mu)$ можно сопоставить такую B-изм. ф-цию $E(f|B)$, что

1) $E(f|B)$ явл. усл. матожид.;
2) $E(f|B) = f$ μ-п.в. $\forall$ B-изм. μ-инт. f;
3) $E(f|B) \geq 0$ μ-п.в., если $f \geq 0$ μ-п.в.
4) если $f_n \nearrow f$ или $f_n \searrow f$, где f – μ-инт, то $E(f_n|B) \xrightarrow[\mu\text{-п.в.}]{} E(f|B)$
5) для всякого $p \in [1, +\infty]$ отобр. $f \mapsto E(f,B)$ явл. линейным оператором (с нормой 1) в пр-ве $L^p(\mu)$. При этом в $L^2(\mu)$ оно ($= E(\cdot|B)$) будет ортогон. проектором на замкн. лин. подпр-во, порожд. B-изм. функциями.

② Эргодические теоремы

Теор. (Пуанкаре о возвращении)

Пусть (X, B, μ) – вероятн. пр-во и $T: X \to X$ сохр. меру ($\mu \circ T^{-1} = \mu$). Если A – μ-изм., то для μ-п.в. $x \in A$ $\exists$ беск. посл-ть n_k: $T^{n_k} x \in A$.
В частн., если $\mu(A) > 0$, то $\exists x \in A$: $T^n x \in A$ для беск. многих $n \in \mathbb{N}$.

Док-во: $\mu(A) = 0$ очевидно.

Пусть $\mu(A) > 0$. Сначала докажем, что для μ-п.в. $x \in A$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $T^n x \in A$ (такие $x \in A$ назовем возвращающимися). Пусть $E = \{x \in A \mid T^n x \notin A$ для всех $n \geq 1\}$. Оно измеримо.
Чтобы доказать $\mu(E) = 0$, дост. убедиться, что $E, T^{-1}(E), T^{-2}(E), \ldots$ попарно не пересекаются (т.к. они имеют равные меры).
Действительно, пусть $E_{k+1} = T^{-1}(E_k)$, $E_0 = E$ и $x \in E_m \cap E_p$, где $m > p$. Тогда $T^p x \in E \cap T^p E_m = E \cap E_{m-p}$. Следовательно, для точки $y = T^p x$ имеем $T^{m-p} y \in E \subset A$, что противоречит определению мн-ва E.

Исходное утверждение вытекает из доказанной слабой версии. Действит., $\forall k \in \mathbb{N}$ $T^k(\mu) = \mu$. По доказанному выше, почти все $x \in A$ явл. возвр. для T^k. След., μ-п.в. $x \in A$ явл. возвр. сразу для всех T^k. ☒

Теор. (Биркгофа–Хинчина или индивидуальная эргод. теорема)
Пусть (X, A, μ) – вероятн. пр-во и f – μ-инт. ф-ция. Пусть $T: X \to X$ – A-изм. отобр., сохр. меру, и пусть $\tau := \sigma(\{B = T^{-1}B\})$ – σ-алг. всех T-инв. подмн-в. Тогда для μ-п.в. $x \in X$ $\exists$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^k x) := \bar{f}(x), \text{ причем } \bar{f} \in L^1(\mu) \text{ и}$$

$$\bar{f}(x) = E(f|\tau)(x) \text{ для } \mu\text{-п.в. } x \in X \quad \left(\text{и тогда } \int_X f\,d\mu = \int_X \bar{f}\,d\mu\right).$$

Док-во: Заметим, что $E(f|\tau) \circ T = E(f|\tau)$. Действ., $1_B \circ T = 1_B$ $\forall B \in \tau$, поэтому $\forall$ огран. τ-изм. ф-ции ψ имеем $\psi \circ T = \psi$, что дает такое же равенство для всякой τ-изм. ф-ции. След., можно перейти к $f - E(f|\tau)$ и считать, что $E(f|\tau) = 0$.

Пусть $S_k = f + f\circ T + \ldots + f \circ T^{k-1}$; $g = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. Пусть $E := \{g > \varepsilon\}$. Покажем, что $\mu(E) = 0$.

Положим $f^\varepsilon = (f - \varepsilon)\cdot 1_E$; $S_k^\varepsilon = \sum_{j=0}^{k-1} f^\varepsilon \circ T^j$; $M_k^\varepsilon = \max\{0, S_1^\varepsilon, \ldots, S_k^\varepsilon\}$.

Ясно, что $E \in \tau$, т.к. $g \circ T = g$. Кроме того, M_k^ε возрастают и $E = \bigcup_{k=1}^\infty \{M_k^\varepsilon > 0\}$ (это следует из: $S_k^\varepsilon = (S_k - k\cdot\varepsilon)\cdot 1_E$). Нетрудно показать, что $\int_{\{M_k^\varepsilon > 0\}} f^\varepsilon d\mu \geq 0$. Из монот. сход. следует, что

$\int_{\{M_k^\varepsilon > 0\}} f^\varepsilon d\mu \to \int_E f^\varepsilon d\mu \geq 0$. В силу того, что $E(f|\tau) = 0$ и $E \in \tau$ мы имеем: $\int_E f\,d\mu = \int_E E(f|\tau)\,d\mu = 0$. Таким обр., оценка выше записывается в виде: $-\varepsilon \cdot \mu(E) \geq 0$, т.е. $\mu(E) = 0$ и $S_n/n \to 0$ μ-п.в.

Докажем теперь сходимость в $L^1(\mu)$.

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и положим $\psi_N := f \cdot 1_{\{|f| \le N\}}$;

$\varphi_N := f - \psi_N$. Тогда $|\psi_N| \le N$ и из доказанного следует, что $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi_N \circ T^j \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\psi_N | \tau)$ по $L^1(\mu)$. В силу того, что μ — T-инв. и $\|E(\varphi_N|\tau)\|_{L^1(\mu)} \le \|\varphi_N\|_{L^1(\mu)}$, мы получаем:

$$\int_X \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_N \circ T^k - E(\varphi_N|\tau) \right| d\mu \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int |\varphi_N \circ T^k| \, d\mu + \int_X |E(\varphi_N|\tau)| \, d\mu \le 2\int_X |\varphi_N| \, d\mu \longrightarrow 0 \text{ при } N \to +\infty.$$

Поскольку $f = \psi_N + \varphi_N$, то Теор. доказана ∎

Следствие (теор. Биркгофа – Хинчина с непр. временем).

Пусть (X, A, μ) – вероятн-пр-во; φ_t — эргодический поток на X, и пусть $f \in L^1(X,\mu)$. Тогда $\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))\,dt \to \int_X f\,d\mu$ и μ-п.в., и в $L^1(X,\mu)$.

Док-во: Рассмотрим $\bar{f}(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))\,dt$. Хотим показать, что $\bar{f}(x) = E(f|\tau_\infty)$, где τ_∞ — σ-алг., порожд. всеми μ-изм. ф-циями g: $\forall s > 0$ $g(\varphi_s(x)) = g(x)$ μ-п.в.

Применим теперь эргод. теорему к функции $h(x) = \int_0^1 f(\varphi_s(x))\,ds$.

Заметим, что $h(x)$ — μ-изм и выполнено рав-во:

$$\sum_{k=0}^{n-1} h(\varphi_1^k x) = S_n(x) := \int_0^n f(\varphi_s(x))\,ds.$$

Поэтому μ-п.в. существ. $h(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot S_n(x)$.

Дост. рассм. случай, когда $f \geq 0$. Заметим, что $\frac{1}{n}\left(S_{n+1}(x) - S_n(x)\right)$ сход. к 0 для μ-п.в. $x \in X$. Отсюда следует $\exists\, \bar{f}(x)$ μ-п.в.

Для обоснования предела в $L^1(X,\mu)$ дост. рассм. огран. f, т.к. L^1-норма ф-ции $S_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_s(x))\, ds$ не превосходит норму f. Для огран. f равво $\lim_{T\to\infty} \|S_T - \bar{f}\|_{L^1} = 0$ очевидно из доказанного. Ясно, что $\bar{f}(\varphi_s(x)) = \bar{f}(x)$ для п.в. $s > 0$.

Для всякой τ_∞-изм. огр. ф-ции $g(x)$ имеем:

$$\int_X f(x) g(x)\, d\mu = \int_X f(\varphi_s(x))\, g(\varphi_s(x))\, \mu(dx) = \int_X \bar{f}(\varphi_s(x)) \cdot g(x)\, d\mu,$$

откуда $\bar{f} = E(f|\tau_\infty)$. $\boxtimes$

Следствие (Упражнение).

Если φ_t — эргод. поток, то тогда для μ-п.в. $x \in X$ орбита $(\varphi_t)(x)$ равномерна распред. в X.