Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (Сколтех & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:
- Dave Morris "Ratner's Theorems..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures...")
- Alex Furman ("Lectures on...")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, еще 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории

① Эргодичность

(Наша цель: эргодичность действий $\Gamma \curvearrowright X$, плотные орбиты, ...)

Опр. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — a measure space.

$\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Тогда измер. отобр. $T: X \to X$ наз. сохр. меру, если $\mu \circ T^{-1} = \mu$ (т.е. $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$).

Такое отобр. назыв. эргодическим, если T-инв подмн-ва либо меры 0, либо полной меры. То есть:

$$T(E) = E \Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ или } \mu(X \setminus E) = 0 \quad \forall E \subset X.$$

Предл. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пр-во с кон. мерой (вероятн).

Тогда $T: X \to X$ эргодично $\Leftrightarrow$ $\forall$ T-инв μ-изм. $f: X \to \mathbb{R}$ ($f(Tx) = f(x)$) верно $f \equiv \mathrm{const}$ μ-п.в.

Док-во: $\boxed{\Rightarrow}$ Введем $X(k,n) := \{x \in X \mid f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})\}$, где $f(Tx) = f(x)$ для всех $x \in X$. Ясно, что для всех $k \in \mathbb{Z}, n \geq 1$, $X(k,n)$ явл. T-инв. мн-вом. Более того, $X = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} X(k,n)$ для фикс. $n \in \mathbb{N}$. В силу эргодичности T для какого-то $k(n)$ имеем $\mu(\overline{X(k(n),n)}) = 0$ (отсюда ясно, что такое $k(n)$ единств.).

Следовательно, f постоянна на $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X(k(n),n) = Y$, где $\mu(X \setminus Y) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $T^{-1}(E) = E$. Достаточно рассм. $f = I_E$. $\boxed{///}$

Pointwise Ergodic Theorem

Теорема (Birkhoff - Khinchin Ergodic Theorem)

(1) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - вероятн. пр-во и $T: X \to X$ - сохр. меру отобр.

Пусть f - μ-изм. функция. Тогда для μ-п.в. $x \in X$

$\exists$ предел $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \overline{f}(x)$.

Более того, $\overline{f} \in L^1(\mu)$ и $\int_X f \, d\mu = \int_X \overline{f} \, d\mu$.

(2) Если к тому же T - эргодическое, то

$$\overline{f} \equiv c \quad \text{и} \quad \int_X \overline{f} \, d\mu = c = \int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

Док-во: (для (2)) Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ - измеримая борелевская функция.

Введем обозначения: $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1} x)$

$A_n(x) = \frac{1}{n} S_n(x)$. Нетрудно проверить, что $S_{n+m}(x) = S_n(x) + S_m(T^n x)$.

Пусть $f_*: X \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ и $f^*: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, где

$f_*(x) = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n(x)$; $f^*(x) = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n(x)$.

Заметим, что $S_{n+1}(x) = f(x) + S_n(Tx)$. Следовательно,

$A_{n+1}(x) = \dfrac{f(x)}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}\cdot A_n(Tx)$. Отсюда имеем, что

f_* и f^* являются μ-п.в. T-инвариантными.

Далее предполагаем, что T эргодично. Тогда μ-п.в.

$f_*(x) \equiv a_* \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ и $f^*(x) \equiv a^* \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

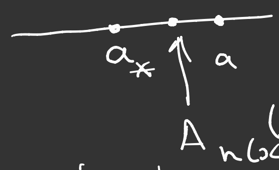
Наша цель: доказать, что $a_* = \int\limits_X f\,d\mu = a^*$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $a = a_* + \varepsilon > a_*$. Пусть

$n(x) = \min\{n\in\mathbb{N} \mid A_n(x) < a\}$. Тогда $n(x)$ измер.

и $n(x) < +\infty$ для μ-п.в. $x\in X$. Для всякого $k\in\mathbb{N}$

положим $E_k = \{x\in X \mid n(x) > k\}$. Легко видеть, что



$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ и $\mu(E_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

(Рассм. $\bigcup\limits_k (X\setminus E_k) = \bigcup\limits_k \{x\in X \mid n(x)\le k\} = \{x \mid n(x) < +\infty\}$ — мн-во полной меры). Найдем дост. большое k, чтобы выполнялось $\int\limits_{E_k} |f(x) - a|\,d\mu < \varepsilon$. Возьмем дост. большое $n\in\mathbb{N}$, чтобы было выполнено $\frac{k}{n}\int\limits_X |f(x)-a|\,d\mu < \varepsilon$. Определим измер. ф-цию $\tilde{n}(x) = \begin{cases} n(x) & \text{где } x\in X\setminus E_k \\ 1 & \text{где } x\in E_k \end{cases}$, $\tilde{n}: X \to \{1,\dots,k\}$.

Определим последовательность $x_n \in X$ для каждой точки $x\in X$:

$x_0 = x$; $x_{j+1} = T(x_j)$. Для дост. большого $n \gg k$ найдется такое число $r \in \mathbb{N}$, что

$$\tilde{n}(x_0) + \tilde{n}(x_1) + \ldots + \tilde{n}(x_{r-1}) \le n < \tilde{n}(x_0) + \ldots + \tilde{n}(x_r).$$ Пусть

$$m := n - (\tilde{n}(x_0) + \ldots + \tilde{n}(x_{r-1})). \quad (\text{т.е. } 0 \le m < \tilde{n}(x_r) \le k).$$

Распишем среднее:

$$A_n(x) = \frac{1}{n} S_n(x) = \frac{1}{n}\left(S_{\tilde{n}(x_0)}(x_0) + \ldots + S_{\tilde{n}(x_{r-1})}(x_{r-1}) + S_m(x_r)\right).$$

Пусть $I = \{ 0 \le i < r \mid x_i \notin E_k \}$; $J = \{0, \ldots, r-1\} \setminus I$.

Тогда $S_{\tilde{n}(x_i)}(x_i) = S_{n(x_i)}(x_i) < n(x_i) \cdot a = \tilde{n}(x_i) \cdot a$ для $i \in I$;

а для $j \in J$: $S_{\tilde{n}(x_j)}(x_j) = f(x_j) \le |f(x_j) - a| + a =$

$= I_{E_k} \cdot |f-a|(x_j) + \tilde{n}(x_j) \cdot a$.

Для последнего слагаемого имеем:

$$S_m(x_r) = \sum_{j=0}^{m-1} f(T^j x_r) \le \sum_{j=n-k}^{n-1} |f(T^j x) - a| + ma.$$

т.в.с.