Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (Сколтех & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:
- Dave Morris "Ratner's Theorems..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures..")
- Alex Furman ("Lectures on..")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, еще 2 версии теор. Ратнер.

① Вполне разрывные действия групп

Пусть X – топол. пр-во, и $G \leq Homeo(X)$ – (под)группа гомеоморфизмов $g: X \to X$. Тогда действие $G' \curvearrowright X$ можно воспринимать через (гомоморфизм) $\varphi: G' \to G$.

Опр 1. Фактор-пр-во – $X/_G = \{ Orb(x) = Gx \mid x \in X \}$, где $G < Homeo(X)$. Снабжается стандартной фактортопологией: пусть $p_G: X \to X/_G$ – проекция, тогда $U \subset X/_G$ назыв. открытым, если $p_G^{-1}(U)$ откр. в X.

Опр 2. Действие $G \curvearrowright X$ назыв.
- свободным, если $gx \neq x$ $\forall g \neq e \in G$ и $\forall x \in X$.
- вполне разрывным (properly discontinuous), если $\forall x, y \in X$ $\exists U_x \ni x$ и $U_y \ni y$, где $U_x, U_y \in \mathcal{T}_X$, т.ч. $\#\{ g \in G \mid g(U_x) \cap U_y \neq \emptyset \} < +\infty$.

Предл. 1 Пусть $G \curvearrowright X$ – св. Хаусд. пр-ве. Тогда след. усл. экв.:
1) $G \curvearrowright X$ свободно и вп. разр.;
2) $X/_G$ явл. хаусд. и отображение $X \to X/_G$ – накрытие.

Накрытия типа $X \to X/_G$ наз. регулярными. Накр. $f: X \to Y$ – рег, если $f(\pi_1(X)) \triangleleft \pi_1(Y)$. В этом сл. $G = {\pi_1(Y)}/{f(\pi_1(X))}$.

Теор 1. Всякое лин.-св. лок-стягиваемое хаусд. топ. пр-во X есть фактор $\tilde{X}/_G$ универс. накр-я $\tilde{X}$ по G, где $G \curvearrowright \tilde{X}$ свободно и вполне разр. и $G = \pi_1(X)$.

(базис топ. U_α : $\mathrm{clos}(U_\alpha)$ = комп.)

Задача 1 Пусть $G \curvearrowright X$ – лок. комп. топ. пр-ве. Тогда С.У.Э.

1) $G \curvearrowright X$ вп. разр.

2) $\forall \underset{\text{компакт}}{K \subset X}$ $\#\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \varnothing\} < +\infty$

3) отобр $G \times X \xrightarrow{F} X \times X$, где $(g, x) \mapsto (g(x), x)$, явл. собств. (proper), то есть $F^{-1}(\text{компакт}) = \text{компакт}$. $\bigcup_g g(K)$

Опр 3. $G \curvearrowright X$ – кокомпактно, если $\exists$ компакт $K \subset X$, т.ч. $G \cdot K = X$

Задача 2. а) $G \curvearrowright X$-кокомп. $\Rightarrow$ $X/_G$ -комп. топ. пр-во

б) Пусть X -лок.-комп. топ пр-во, $G \curvearrowright X$ т.что $X/_G$ –комп. Тогда $G \curvearrowright X$ -кокомп.

② Дискретные подгруппы изометрий $\mathrm{Isom}(M)$.

(Утв.)

Опр 4. Топ. пр-во $C(X, Y)$ можно снабдить compact-open topology, т.е. базис топологии состоит из $U_{K,V} := \{f : X \to Y \mid f(\underset{\text{compact}}{K}) \subset V \in \tau_Y\}$

Замечание: Если $Y = (Y, \rho_Y)$, то compact-open top $\Leftrightarrow$ топологии равном. сход-ти на компактах, т.е. $\{f_i\} \in C(X, Y)$ – сход к $f \in C(X, Y)$, если $\forall K \subset X$: $f_i|_K \xrightarrow{\text{равн.}} f|_K$.

Опр 5 $\mathrm{Isom}(M) = \{g \text{ -изометрия } M\} << \mathrm{Homeo}(M)$ $\quad g = \text{diffeo}, \ \rho(gx, gy) = \rho(x, y)$.

Теор 2 (Myers–Steenrod)
$\mathrm{Isom}(M)$ – группа Ли с топологией, совм. с compact-open top. Отобр.
$F: \mathrm{Isom}(M) \times M \to M \times M$, $(g, p) \mapsto (g(p), p)$ явл собств.

Предл. 2 1) M – компактно $\Rightarrow$ $\mathrm{Isom}(M)$ - комп гр. Ли

2) $\forall x \in M$ стабилизатор $G_x = \mathrm{Stab}(x) = \{g \in G = \mathrm{Isom}(M) \mid g(x) = x\} < G$ является компактной подгр. Ли.

Обозн. $\mathrm{Isom}^+(M) < \mathrm{Isom}(M)$ – подгр. индекса 2 изометрий, сохр. ориент.

Задача 3 Пусть M – рим. мн-е. Докажите, что $\Gamma \curvearrowright M$ вп.разр. $\Leftrightarrow$ $\underset{\text{дискр. подгр}}{\Gamma < \mathrm{Isom}(M)}$

Если M полно, то эти усл-я равносильны тому, что $\forall x \in M$ и $\{g_n\}$ - бескон посл-ти

$\left.\begin{array}{l}\text{орбита } \Gamma x \text{ дискр} \\ \text{стабил. } \Gamma_x \text{ конечны}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$ предел $\lim_{n \to +\infty} \rho(x, g_n(x)) = +\infty$.

Hint: Теор. Асколи–Арцела

Предл. 3. Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ — т.ч. $\Gamma \curvearrowright M$ — свободно, вп. разр. Тогда существует единств. стр-ра римановa мн-я на M/Γ, т.ч. $\pi: M \to M/\Gamma$ — лок. изометрия.

Док-во: Пусть $U \subset M/\Gamma$: $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, где $\pi|_{U_i}: U_i \to U$ — гомеоморфизм.

Тогда берём U_1 и переводим рим стр-ру с U_1 на U. Она не зависит от U_1, поскольку $\forall U_i \; \exists g_i : g_i(U_1) = U_i$, где $g_i \in \Gamma < \mathrm{Isom}(M)$. ■

③ Фундаментальные области дискр. групп

Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ дискр.

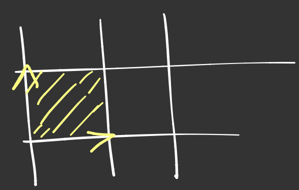
Опр 6. Замкн. область $D \subset X$ назыв. фунд. областью для Γ, если

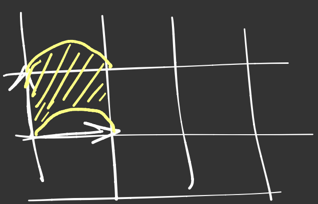
1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = X$

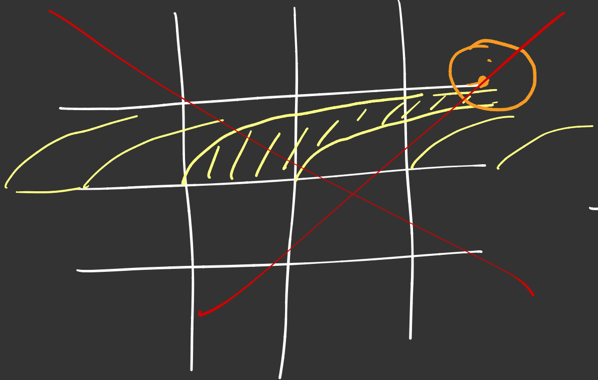
2) $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(\gamma' D) \neq \varnothing \iff \gamma = \gamma'$

3) (лок. кон) $\forall p \in X \; \exists \varepsilon > 0 : \#\{\gamma \in \Gamma \mid B(p, \varepsilon) \cap \mathrm{int}(\gamma D) \neq \varnothing\} < +\infty$.

Примеры: 1) $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{E}^2$







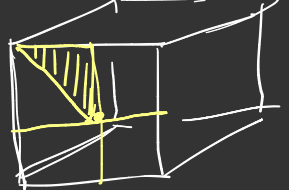
— это НЕ фунд. область!

2) $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$
$= \langle R_{e_1}, R_{e_2} \rangle$

или $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{E}^2$:
$\mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$, $\gamma(l_1) = l_2$
пар. перенос.

Здесь $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z} =$

3) $\mathrm{Sym}(P) \curvearrowright$ пов-ти P



Опр. Пусть $\Gamma \curvearrowright X$ (топ. пр-во, группа, метр. пр-во, и т.д.) с мерой вполне разрывно. Тогда замкнутая область $D \subset X$ назыв. <u>фунд. областью для</u> Γ, если

1) $\Gamma \cdot D = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = X$

2) $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(D) \neq \varnothing \Leftrightarrow \gamma = e$

?[3) (лок. кон.) $\forall x \in X \ \exists U_{x \ni x} \in \tau_X$: $\mu(U_x) < +\infty$ и $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathring{D}) \cap U_x \neq \varnothing\} < +\infty$.]

$\mathring{D} = \mathrm{int}(D)$

ещё обычно просим D быть nice:
- $\mathrm{clos}(\mathrm{int}(D)) = D$
- $\mu(D \setminus \mathrm{int}(D)) = 0$

Теор. Пусть $\Gamma \curvearrowright X$ – вполне разрывно. Тогда $\exists D \in \mathcal{B}(X)$: отобр. $D \to X/\Gamma$ – биективно
$x \mapsto \Gamma x$

(Для $\Gamma < \mathrm{Isom}(X^n)$ надо строить область Дирихле $D(a) = \bigcap_{\gamma \neq 1} H_\gamma(a)$.)

Конструкция для фунд. области:
Пока для $X = G =$ группа Ли!

Поскольку Γ – дискр., то $\exists \underset{\text{отк}}{U} \subset G$: $(U^{-1}U \cap \Gamma) = \{e\}$

Далее, $\exists \{g_n\}$: $\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n U = G$. Тогда $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(g_n U \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} g_k U \Gamma\right)$.

④ Борелевские меры и мера Хаара.

Опр. Борелевское мн-во $A \subset X$ – получено из открытых (τ_X) с помощью $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, и дополнений. Борелевские мн-ва образуют борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$ на X. Борелевская мера μ — это σ-аддит. ф-ция $\mu: \mathcal{B} \to [0, +\infty)$.

Мера конечная, если $\mu(X) < +\infty$, и лок. кон., если $\forall x \in X \ \exists U_x \ni x$, т.ч. $U_x \in \mathcal{B}$ и $\mu(U_x) < +\infty$.

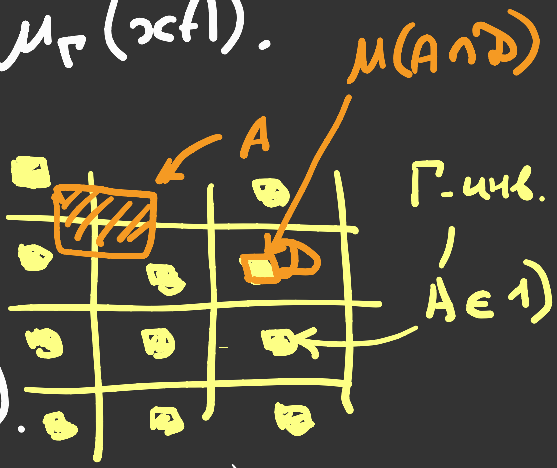
Теор. (Хаар)
На всякой лок. комп. топол. группе G (со счетн. базой) существ. и единст. (с точн. до множ.) левоинвариантная борелевская (σ-конечная) мера μ (мера Хаара). ($\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \in \mathcal{B}$).

Проекция меры Хаара на дискр. подгруппу:

Предл. Пусть $\Gamma < G$ — дискр. подгр., и пусть μ — мера Хаара на группе Ли G. Тогда на G/Γ существует единств. с точностью до множителя борел. G-инв. мера μ_Γ:

1) для фунд. области $D \subset G$ меру μ_Γ можно опред.:
$$\mu_\Gamma(A/\Gamma) := \mu(A \cap D) \quad \forall A \in B(G) \text{ т.ч. } \Gamma A = A.$$
$\mu(gA) = \mu(A)$

2) И обратно: для $A \leq G$
$$\mu(A) = \int_{G/\Gamma} \#(A \cap xA)\, d\mu_\Gamma(xA).$$

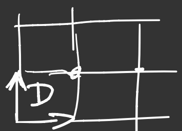


(Если $U \subset G/\Gamma$, то $U = \tilde{U}/\Gamma$, где $\tilde{U}\cdot\Gamma = \tilde{U}$. То есть $\mu_\Gamma(U) = \mu(\tilde{U} \cap D)$).

Опр. 14 Дискр. подгр. $\Gamma < G$ назыв. решеткой $\mu(G/\Gamma) < +\infty$, ($= \operatorname{covol}(\Gamma)$) и равномерной решеткой, если G/Γ — комп.

Примеры

$\Gamma = \mathbb{Z}^2 \cong T_{e_1,e_2} \curvearrowright E^2$. (своб вп. разр.) В данном случае $\mathrm{Isom}(E^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes O_2(\mathbb{R})$. т.е. $E^2 = \mathrm{Isom}(E^2)/O_2(\mathbb{R}) = G/K$, $\mathbb{Z}^2 < G$.



Здесь E^2/Γ = тор (компакт). Тогда $\operatorname{covol}(\Gamma) < +\infty \iff \operatorname{vol}(E^2/\Gamma) < +\infty$

G/Γ комп $\iff E^2/\Gamma$ компакт.

Опр 13 Правый сдвиг меры Хаара $r_g(\mu) = \lambda(g)\cdot\mu$, где $\lambda : G \to \mathbb{R}_{>0}$ — модулярная ф-ция.

Группа G наз. унимодулярной, если $\lambda \equiv 1$.

Предл. 5 Компактные, абелевы или простые гр. Ли унимод-ны. (в частн. $SO^\circ_{p,q}$)

Док-во: Если G компактна, то $\lambda(G) \subset \mathbb{R}_+$ — компактно, т.е. $\lambda \equiv 1$.

Если G — абелева гр., то очевидно. Если G — проста, то

$\ker(\lambda)^\circ = G$

Предл. 2 Если в лок. комп. гр. G есть решётка, то G – унимод.
[? Идея: $\mu(G/\Gamma) = \mu((G/\Gamma)\cdot g) = r_g(\mu)(G/\Gamma) = \lambda(g)\,\mu(G/\Gamma)$] и $\lambda|_\Gamma = 1$

Опр 3 Подгр. $\Gamma_1, \Gamma_2 < G$ назыв. соизмеримыми ($\Gamma_1 \sim \Gamma_2$), если $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < +\infty$ и $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < +\infty$. Группа $\mathrm{Comm}_G(\Gamma) = \{g \mid g\Gamma g^{-1} \sim \Gamma\}$ называется соизмерителем Γ в G.

Предл. 3 Пусть $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ в G. Тогда если Γ_1 явл. дискретной; решёткой или равном. решёткой, то и Γ_2 такая же.

Пусть теперь $X = G/K$, где $K < G$ – комп. подгр.

Предл. 4 (1) $\Gamma < G$ решётка $\Leftrightarrow \mathrm{vol}(X/\Gamma) < +\infty$
— " — равном. решётка $\Leftrightarrow X/\Gamma$ – компакт.

(2) Пусть $H < G$ – замкн. подгр., $\Gamma < G$ – решётка. Группа Γ явл. дискр. подгр. преобр (т.е. Γx дискр. и Γ_x конечны) на $X = G/H$ $\Leftrightarrow$ H компактна.

Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ дискр.; $X = G/K$

Опр 4. Замкн. область $D \subset X$ назыв. фунд. областью для Γ, если

1) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = X$

2) $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(\gamma' D) \neq \varnothing \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$

3) (лок. кон) $\forall p \in X \ \exists \varepsilon > 0 : \#\{\gamma \in \Gamma \mid B(p,\varepsilon) \cap \mathrm{int}(\gamma D) \neq \varnothing\} < +\infty$

Теор. 2 $\Gamma < G$ – решётка $\Leftrightarrow \mathrm{vol}(D) < +\infty$ и
Γ – равном. решётка $\Leftrightarrow D$ – компактна.
(Верно и для $\Gamma \curvearrowright G$.)

Про дискр. подгр. $\Gamma < \mathrm{Isom}(\Gamma)$ и их фундаментальные многогранники см. спецкурс в НМУ весна 2021 года "Геометрия, арифметика и динамика дискр. групп".

⑤ Measure-theoretic versions of Ratner's Theorems.

Пример (тор) Пусть $\mu(T^n)=1$, $B\subset T^n$. Тогда $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\frac{\lambda(\{t\in[0,T] \mid \varphi_t(x)\in B\})}{T}\xrightarrow[T\to+\infty]{}\mu(B)$$

Теор (Ratner's Measure Classification Theorem)

Пусть $\Gamma \underset{\text{реш.}}{<} G$, φ_t – унип. поток на G/Γ. Тогда всякая φ_t – инв. эргод. мера на G/Γ явл однородной.

Опр. Действие $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ эргодично, если

1) оно сохраняет меру, т.е. μ – Γ-инв.

2) всякая Γ-инв. измеримая функция на X явл. const.

$\Updownarrow$

2') если $\Gamma\cdot U=U$, то $\mu(U)=0$ или $\mu(X\setminus U)=0$.

Теор. (Ratner's Equidistribution Theorem)

Пусть $\Gamma<G$ – решетка в группе Ли G, φ_t – унипот. поток на G/Γ. Тогда всякая φ_t-орбита равномерно распределена в своем замыкании.