Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (ИППИ & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:
Dave Morris "Ratner's Theorems ..."
Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
Curtis McMullen ("Lectures..")
Alex Furman ("Lectures on..")

II. Меры, мера Хаара, дискретные группы, решетки, фунд. области, эргодичность, ещё 2 версии теор. Ратнер.

III. Основы эргодической теории-1

IV. Основы эргодической теории-2

V Эргодические действия групп

VI Эргодические теоремы: Hopf, Moore and Howe-Moore

VII Теоремы Howe-Moore в более общем случае.

VIII Приложения теорема Мура: - жесткость Мостова
- пр-во унимод. реш-ок $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$

IX Теоремы Ратнер + Oppenheim Conj - Kazhdan's Property (T)

X Arithmetic groups, Margulis Superrigity and Arithmeticity Thms

① Арифметические группы

Классические примеры арифм. решеток в группах Ли:

$SL_n(\mathbb{Z}) < SL_n(\mathbb{R})$; $PSL_2(\mathbb{Z}) < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = PSL_2(\mathbb{R})$, ...

Общая идея: пусть G — алгебр. $\mathbb{Q}$-группа, верно ли, что тогда $G(\mathbb{Z})$ будет решеткой в группе Ли $H = G(\mathbb{R})$?

Ответ зависит от наличия нетривиальных рациональных характеров.

Опр. Рац. характер — полиномиальный $\mathbb{Q}$-морфизм $\chi: G \to \mathbb{R}^*$.

Лемма Пусть G — связная простая алгебр. $\mathbb{Q}$-группа. Тогда всякий характер $\chi: G(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ либо сюръективен (т.е. $\chi(G(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$), либо тривиален.

Док-во Заметим, что χ явл. непр. отображением. Если образ χ дискретен в окр-ти $r \in \mathbb{R}^*$, то он также дискретен в окр-ти $1 \in \mathbb{R}^*$. Тогда $\chi^{-1}(1)$ есть

? связная (нормальная) подгруппа в $G(\mathbb{R})$ ☒

Вопрос: Верна ли лемма в общем случае?

Опр. Арифм. подгруппа: $\Gamma \sim G_L = \{g \in G \mid g(L) = L\}$, где L — $\mathbb{Z}$-решетка в $V_{\mathbb{Q}}$; V — вещ. пр-во; $G \subset GL(V)$.

Замеч: $G(\mathbb{Z}) = G \cap GL_n(\mathbb{Z}) = G_{\mathbb{Z}^n}$; $\forall L_1, L_2$ имеем $G_{L_1} \sim G_{L_2}$.

Пример $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\det: G \to \mathbb{R}^*$ — нетрив. характер.

(спойлер: $GL_n(\mathbb{Z})$ не явл. решеткой в $GL_n(\mathbb{R})$, т.к. $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$; $\mu(\mathcal{L}_n) < +\infty$)
$GL_n(\mathbb{Z}) = SL_n(\mathbb{Z})$;

Предл Пусть G — алгебр. $\mathbb{Q}$-группа, т.ч. $\exists$ нетрив. характер над $\mathbb{Q}$. Тогда $\mu(G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})) = +\infty$.

Док-во: Перейдем к св. комп. $G^\circ(\mathbb{R})$. Тогда $\chi(G^\circ(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$.
Заметим, что $\chi(G^\circ(\mathbb{Z})) \subset \mathbb{Z}$, след., $\chi(G^\circ(\mathbb{Z})) = \{\pm 1\}$ (в силу нетрив.)
Предп., что $\mu(G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})) < +\infty$. Тогда χ - непр. сюръект. морфизм в $\mathbb{R}^*$ и на $\chi(G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})) = \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$ должна существовать конечная мера Хаара $\mu_{\mathbb{R}^*}$, что неверно. ☒

Замеч. Связные компоненты п/п $\mathbb{Q}$-групп не имеют нетрив. $\mathbb{Q}$-характеров, т.е. для них последнее предл. не выполнено.

Теорема (Борель, Хариш-Чандра, 1962)

Пусть G — редуктивная $\mathbb{Q}$-группа, т.ч. G° не имеет нетрив. $\mathbb{Q}$-характеров. Тогда $G(\mathbb{Z}) < G(\mathbb{R})$ — решетка.

(Док-во основано на построении обл-тей Зигеля.)

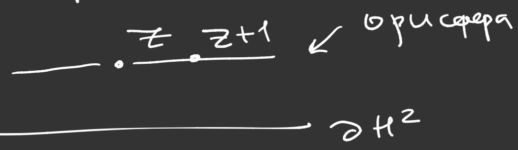
Теор (Критерий компактности Годемана)

Пусть G - алг. $\mathbb{Q}$-группа без нетрив. $\mathbb{Q}$-характеров.

Тогда $G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})$ — компакт $\Leftrightarrow$ все унипот. эл-ты $((1-A)^n=0)$ лежат в униП. радикале.

Если G - п/п, то $G(\mathbb{R})/G(\mathbb{Z})$ - комп $\Leftrightarrow$ G не имеет нетрив. униП. эл-тов.

Пример. $F(z)=z+1$; $F\in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ - параболическая изометрия (поворот вокруг $+\infty$).



$\mathrm{Mat}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - унипотентна.

Теор 1) $F\in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = O^+_{n,1}(\mathbb{R})$ и F - параболический поворот $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}(F)$ имеет все собств значения $=1$ (т.е. униП.).

2) Если $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ - неравком решетка, то она содержит параб. поворот ($=$ униП. эл-т).

Пусть $k\subset\mathbb{R}$ - вполне вещ поле алг чисел, $\mathcal{O}_k$ - кольцо целых

Пусть H - некомп. п/п группа Ли, т.что H° не имеет комп. множ.

Опр. Алгебр. k-группа G назыв <u>допустимой</u> для H, если G — почти простая и $\exists$ сюр. гомом. $\varphi: G(k\otimes\mathbb{Q})^\circ \to H^\circ$ с компактным ядром.

$$G(k\otimes\mathbb{Q})^\circ = \Big(\prod_{\sigma: k\hookrightarrow\mathbb{R}} G^\sigma(\mathbb{R})\Big)^\circ$$

Т.е. $\prod_\sigma G^\sigma(\mathbb{R})^\circ \cong H^\circ\times K$.

Вложение $k \hookrightarrow \mathbb{Q}^d$, где $d = \deg(k:\mathbb{Q})$, позволяет получить функтор ограничения скаляров $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}$, для которого

$\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G) = \widetilde{G}$ – $\mathbb{Q}$-группа; $\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G(\mathcal{O}_k)) = \widetilde{G}(\mathbb{Z})$ – арифм. подгр.

$$\mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{R}} = G^{id=\sigma_1}(\mathbb{R}) \times G^{\sigma_2}(\mathbb{R}) \times \dots \times G^{\sigma_d}(\mathbb{R}) = G(k\otimes\mathbb{Q}) = \prod_{\sigma: k\hookrightarrow\mathbb{R}} G^{\sigma}(\mathbb{R}).$$

Теорема (Borel & Harish-Chandra '1962, Ann. Math.)

Если для $\Gamma < H$ верно, что $\Gamma \sim G(\mathcal{O}_k)$, где G – доп. k-гр. для H, то Γ – решетка в H (по мере Хаара).

Более того, если $\pi : \underset{H\times K}{\underset{\cong}{G(k\otimes\mathbb{Q})}} \to G(k\otimes\mathbb{Q})/K'$, где $K' < K$ (какая-то часть), то $\pi(G(\mathcal{O}_k))$ – решетка в $\pi(H\times K)$.

$\boxed{\text{Пример: } SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) < SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})}$

Опр. Решетки в H из теор. Б–Х–Ч наз. арифметическими.

Теор (Borel's Density Theorem)

[вещ. алгебр. группе $G \subset GL_N(\mathbb{R})$]

Пусть $\Gamma < G$ – решетка в п/п гр. Ли без комп. множ. Тогда $Zcl(\Gamma) \supseteq G^{\circ}$

т.е. если $p(x_{11}, \dots, x_{nn}) \in \mathbb{R}[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ (многочлены на $Mat_N(\mathbb{R})$) и $p(\Gamma) = 0$, то и $p(G^{\circ}) = 0$.

Теор (Margulis Superrigidity Theorem '1974)

Пусть $G_1 \underset{\text{изогения}}{\not\sim} SO_{n,1}(\mathbb{R}) \times K$ или $SU_{n,1}(\mathbb{R}) \times K$. ($\Leftarrow rk_{\mathbb{R}} G_1 \geq 2$)

Пусть G_1, G_2 – связные п/п гр. Ли без центра и компактных множителей.

Пусть $\Gamma < G_1$ неприводим. решетка и $\varphi : \Gamma \to G_2$ – гомоморфизм, т.что $\underbrace{Zcl(\varphi(\Gamma))}_{\text{замыкание по Зарисскому}} = G_2$. Тогда φ продолж. до непр. гомоморфизма $\hat{\varphi} : G_1 \to G_2$.

(Грубо говоря, $\Gamma_j < G_j$ реш, $\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow[\text{гом}]{} \Gamma_2 \Rightarrow \exists\, \hat{\varphi} : G_1 \to G_2$)

Опр. Решетка $\Gamma < G$ неприв., если ΓN всюду плотна в G° для всякой некомп., замкн. норм. подгр. $N \lhd G$.

Теор (Margulis Superrigidity for p-adic fields)

Если $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G \geqslant 2$; $\Gamma < G$ – неприв решетка; $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адич чисел и $\varphi : \Gamma \to GL_n(\mathbb{Q}_p)$ – гомоморфизм, то $\overline{\varphi(\Gamma)}$ – компакт. (т.е. $\varphi(\Gamma)$ – предкомпакт)

Более точно, $\exists N \in \mathbb{Z}$: $\forall g \in \varphi(\Gamma)$ $g_{ij} \in p^N \cdot \mathcal{O}_p$, где $\mathcal{O}_p$ – кольцо целых p-адич. чисел (оно компактно).

Теор (Margulis Commensurator Rigidity)

Пусть $\Gamma < H$ – решетка, и пусть $\mathrm{Comm}_H(\Gamma) = \{h \mid h\Gamma h^{-1} \sim \Gamma\}$

Тогда Γ – арифм. подгр $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Comm}_H(\Gamma)$ плотен в H

Γ – неарифм. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Comm}_H(\Gamma) \sim \Gamma$, т.е. решетка

(Ясно, что $\mathrm{Comm}_H(\Gamma) \supset \Gamma$; и если Γ – арифм. т.е $\Gamma \sim G(\mathcal{O}_k)$, то $\mathrm{Comm}_H(\Gamma) \supset G(k)$.)

Теор (Винберг '1971)

Пусть $\Gamma < G$ – дискр. подгр. в п/п компл. алг. гр., причем $Zd(\Gamma) = G$. Пусть $Ad: G \to GL(\mathfrak{g})$ – присоед. пр-дставление. Тогда adjoint trace field $k = \mathbb{Q}(\{tr(Ad\,\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\})$ – инвариант класса соизм гр. Γ и $\Gamma < G(k)$. М.сл., что $\exists k$-гр. G': $\Gamma < G'(k)$ и $G'(\mathbb{C}) = G$

Теор (Прасад, Рапинчук, 1990-е)

Если $\Gamma \sim G(\mathcal{O}_k)$ – арифм. решетка, G – абсолютно почти проста и K – adjoint trace field, то $k = K$.

Теор (Margulis Arithmeticity Theorem '1974)

Всякая неприводимая решетка $\Gamma < G$ в п/п гр.Ли за исключением случая, когда G изогенна $SO_{n,1}(\mathbb{R}) \times K$ или $SU_{n,1} \times K$, явл. арифметической.

② Superrigidity + Local Superrigidity + Vinberg $\Rightarrow$ Arithmeticity

Идея: очень коротко!

Пусть $\Gamma < H$ — решетка в группе Ли. Тогда по теор. Винберга $\exists$ k-группа G: $\Gamma < G(k)$ с точн. до конечного индекса и $G(\mathbb{R}) \cong H$. Можно считать, что $\Gamma < G(k) < SL_n(k)$.
Благодаря супержесткости, можно док-ть, что k — поле алгебр. чисел.
Далее, воспользуемся следующим предл-ем:

Предл $\Gamma < G(k)$, где k — adjoint trace field, и пусть S is a set of all places of k: finite places $k_v \leftrightarrow$ простые идеалы в $\mathcal{O}_k$; infinite places are $k \hookrightarrow \mathbb{R}$.
(архимедовы и неархимедовы норм-я)
и пусть всякому $k \to k_v$ для $v \in S$ соотв-т $\Gamma \to \varphi(\Gamma) \subset G(k_v)$.
Тогда Γ арифметична $\iff$ $\operatorname{clos}(\varphi(\Gamma))$ — компакт в $G(k_v)$ для всех $v \in S$.

Надо заметить, что для бескон. places это предл. дает допустимость алгебр. группы G. (Это предл. на самом деле следует из 2-х теорем жесткости) Остается использовать, что уже после ограничения скаляров $\Gamma < G(\mathcal{O}_p)$ для всех p-адических нормирований, откуда $\Gamma < G(\mathbb{Z})$.
Поскольку Γ — решетка, то она соизмерима с $G(\mathbb{Z})$.

③ Идея док-ва Superrigidity

Flat vector bundles: $\varphi: \Gamma \to GL_n(\mathbb{R})$ — гомоморфизм, тогда $\Gamma \curvearrowright G \times \mathbb{R}^n$: $(x, v)\circ\gamma = (x\gamma, \varphi(\gamma^{-1})\cdot v)$. Пусть $\mathcal{E}_\varphi = (G\times\mathbb{R}^n)/\Gamma$.
Тогда отобр. $\pi: \mathcal{E}_\varphi \to G/\Gamma$; $\pi([x,v]) = x\Gamma$, корр. определено, и $\mathcal{E}_\varphi$ явл. вект. расслоением над G/Γ.

Предл $G = SL_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{E}_\varphi$ — любое вект. рассл. над G/Γ, опред. выше. Тогда $\exists\, \Gamma' < \Gamma, [\Gamma:\Gamma'] < +\infty$, т.что поднятие $\mathcal{E}_\varphi$ на G/Γ' явл. тривиальным (т.е. $\mathcal{E}_{\varphi'} \simeq G/\Gamma' \times \mathbb{R}^n$)
где $\varphi' = \varphi|_{\Gamma'}$

Лемма Если представление φ неприводимо и $\exists$ нетривиальное G-инв. подпр-во $V \subseteq \mathrm{Sect}(\mathcal{E}_\varphi)$, $\dim V < +\infty$, тогда φ продолжается
пр-во сечений
до непр. гомоморфизма $\tilde{\varphi}: G \to GL_n(\mathbb{R})$.

Лемма Если H — замкн. некомп. подгр. в макс. расщепимом торе $A < K$, V — H-инв. подпр-во в $\mathrm{Sect}(\mathcal{E}_\varphi)$, $\dim V < +\infty$, то $\langle C_G(H) \cdot V \rangle$ — конечномерно.

(Идея док-ва: $V = \mathbb{R}\sigma$ — оболочка H-инв. сечения. В силу теор. Мура об эргодичности почти все H-орбиты на G/Γ плотны. Значит, всякое непр. H-инв. сечение расслоения $\mathcal{E}_\varphi$ опред. значением в конкретной точке, следовательно, пр-во H-инв. сечений конечномерно. А оно содержит $\langle C_G(H) \cdot V \rangle$. ▧)

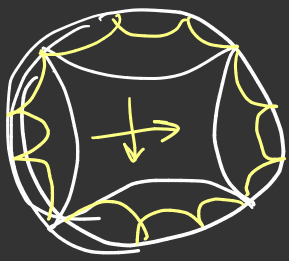
Предположим, что $\exists$ нетрив. A-инв. сечение σ рассл-я $\mathcal{E}_\varphi$. Пусть $H_0 = A$ и $V_0 = \langle \sigma \rangle$. Тогда $V_0 \subset \mathrm{Sect}(\mathcal{E}_\varphi)$, V_0 — H-инв.
1-dim
Далее, для $i = 1, \dots, r$ $V_i := \langle L_i \cdot A \cdot L_{i-1} \cdot A \dots \cdot L_1 \cdot A \cdot V_0 \rangle$.

Предл Если $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G \geq 2$, то $\exists\, L_1, \dots, L_r < G$:
1) $G = L_1 \cdot \ldots \cdot L_r$
2) $H_i = L_i \cap A$ — некомп и
$H_i^{\perp} = C_A(L_i)$ — некомп.

Ясно, что V_r явл. G-инв. Тогда дост. пок-ть, что всякое V_i явл конечномерным. Поскольку $H_{i-1} \subseteq L_{i-1}$, то V_{i-1} явл H_{i-1}-инв. Далее, A централизует H_{i-1}, следовательно, $\langle A \cdot V_{i-1} \rangle$ — конечномерно. Теперь, поскольку $H_i^{\perp} \leq A$, мы имеем $\langle A \cdot V_{i-1} \rangle$ — $H_i^{\perp}$-инв. Тогда раз L_i централизует $H_i^{\perp}$, то $V_i = \langle L_i \cdot A \cdot V_{i-1} \rangle$ имеет $\dim V_i < +\infty$. Значит, φ продолж. ▧

④ Normal Subgroups of Γ

Пример $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ – неком. арифм. решетка. Тогда можно доказать, что $\Gamma \sim PSL_2(\mathbb{Z})$. Пусть $\Gamma \cong F_2$ – свободная группа Шоттки.



Тогда $[\Gamma,\Gamma] \lhd \Gamma$, причем $[\Gamma,\Gamma] = F_\infty$ и $[\Gamma : [\Gamma,\Gamma]] = +\infty$.

Теор Если Γ – решетка в $\mathrm{Isom}(H^n) = O^+_{n,1}(\mathbb{R})$, то Γ имеет нормальную подгр. $N \lhd \Gamma$, т.что $\mathrm{card}(N) = +\infty$ и $[\Gamma : N] = +\infty$.

Теор (Margulis Normal Subgrp Theorem)

Пусть $\Gamma < G$ – неприв. решетка, $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G \geq 2$, $N \lhd \Gamma$.

Тогда либо $\mathrm{card}(N) < +\infty$, либо $[\Gamma : N] < +\infty$.

⑤ Новый критерий арифметичности гиперб. многообразий

Теор (Bader, Fisher, Miller, Stover: Ann Math 2021)

Пусть $\Gamma < SO_0(n,1) = \mathrm{Isom}^+_0(H^n)$ – torsion free lattice. Тогда $M = H^n/\Gamma$ арифметично $\Leftrightarrow$ M имеет бескон. много макс. вполне геод. подмн-й $N \subset M$, т.что $\dim(N) \geq 2$.

Основано на след. Предл: След. усл. экв.

1) Γ арифм;
2) образ Γ предкомпактен в $G(k_v)$ для всех точек $v \in S$;
3) H^n/Γ имеет беск. много макс. вп. геод подмн-в;
4) $\exists\, m \geq 2$, $m < n$, т.что $\exists \{\mu_i\}$ – посл-ть $SO_0(m,1)$-инв эргод. мер., т.что μ_Γ – мера Хаара на G/Γ есть $*$-слабый предел мер μ_i (т.е. $\mu_i \xrightarrow{w} \mu_\Gamma$).