Эргодическая теория и динамика дискретных групп

Богачев Н.В. (Сколтех & МФТИ)

I Введение (цели курса: теоремы Ратнер и их прил.; о чем это всё?)

Основные источники:

- Dave Morris "Ratner's Theorems ..."
- Dave Morris "Intro to arithmetic groups"
- Curtis McMullen ("Lectures..")
- Alex Furman ("Lectures on ..")

Пример Рассм. тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Пусть $[x] = \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{}{x}} + \mathbb{Z}^n \in T^n$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Всякий вектор $v \in \mathbb{R}^n$ опред. C^∞-поток φ_t на T^n:

$$\varphi_t([x]) = [x + tv], \text{ где } x \in \mathbb{R}^n \text{ и } t \in \mathbb{R}.$$

C^∞-поток:
1. φ_0 – тожд. отобр.
2. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$
3. $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$, $\varphi(x,t) = \varphi_t(x)$, – C^∞-гладкое отобр.

Можно показать, что $\mathrm{clos}(\varphi_t\text{-орбита})$ – подтор в T^n.

Более точно, $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists \underset{\text{подпр-во}}{S \in \mathbb{R}^n}$:

(S1) $v \in S$ (т.е. φ_t-орбита точки $[x]$ вся лежит в $[x+S]$)

(S2) $[x+S]$ – компакт в T^n, т.е. $[x+S] \overset{\text{diffeo}}{\cong} T^k$, $k = 0,\dots,n$

(S3) $[x+S] = \mathrm{clos}(\varphi_t\text{-орбита}([x]))$.

Иными словами, замыкание всякой орбиты является хорошим, красивым, геометрическим подмножеством тора T^n !!

Ratner's Orbit Closure Theorem

- Заметим, что $\mathbb{R}^n$ – группа Ли
- $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$ – дискр. подгр.
- $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ – компакт (т.е. $\mathbb{Z}^n$ – равном. решётка в $\mathbb{R}^n$)
- $t \mapsto tv$ – C^∞ – 1-парамет. подгр. в $\mathbb{R}^n$.

Теорема Ратнер о замыкании орбит позволяет

- $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ группа Ли G
- $\mathbb{Z}^n \rightsquigarrow$ равном. решётку $\Gamma < G$
- $(t \mapsto tv) \rightsquigarrow$ унипотентную 1-парам подгруппу $u^t < G$.

Опр. $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ – унип. матрица, если $(A-I)^n = 0$.

Замет: G, Γ, u^t определяют поток на $G/\Gamma := \{\Gamma x \mid x \in G\}$

$$\varphi_t(\Gamma x) = \Gamma x u^t \quad \text{для } x \in G \text{ и } t \in \mathbb{R}$$

Теор. Ратнер (предв. версия)

Пусть даны G, Γ, u^t и φ_t на G/Γ. (см. выше)

Тогда $\forall x \in G \ \exists S < G$ – связная замкнутая подгр Ли. :

(S1) $\{u^t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset S$ (φ_t-орб.$([x]) \subset [xS]$)

(S2) $[xS] \cong S/\Lambda$, где $\Lambda < S$ – решётка.

(компактное подмн-е в G/Γ)

(S3) $\mathrm{clos}(\varphi_t\text{-орб}[x]) = [xS] = S/\Lambda$.

Некоторые факты:

1) На всякой лок.-комп. топол. группе G существует лево-инвар. борелевская мера (Хаара) μ.

2) Пусть $\Gamma < G$ – дискр. подгр. Тогда для $\Gamma \curvearrowright G$ существует фундаментальное мн-во.

3) Меру μ на G можно спроецировать в μ_Γ на G/Γ.

4). Если $\mu_\Gamma(G/\Gamma) < +\infty$, то Γ – решетка
G/Γ – компакт, то Γ – равном. решетка.

Ratner's Theorem (Orbit Closure Th)

Пусть G – группа Ли, Γ – решетка в G, и пусть φ_t – унипотентный поток на G/Γ. Тогда
clos(всякой φ_t-орбиты) – однородно.

Пример $G = SL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$.

Обозначим: $u^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$, $a^t = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

Заметим, что $u^t \cdot u^s = u^{t+s}$; $a^{s+t} = a^s \cdot a^t$.

Спроецируем u^t и a^t на G/Γ:

$$h_t(\Gamma x) = \Gamma x \cdot u^t \quad ; \quad \gamma_t(\Gamma x) = \Gamma x \cdot a^t.$$

horocycle (орициклический) flow

унипот. поток, т.е. теор. Ратнер применима

geodesic flow (геодезический)

(?) $\left(SL_2(\mathbb{R}) / SL_2(\mathbb{Z}) \cong PSL_2(\mathbb{R}) / PSL_2(\mathbb{Z}) \right)$

Не-унип.
~~т. Ратнер~~

Приложения

Пусть $q(x)$ — веществ. квадр. форма над $\mathbb{R}$, т.е.

$$q(x) = x^t Q x$$

Теорема Маргулис (Oppenheim Conj)

Пусть $Q(x)$ — неопред. невырожд. квадр. форма $\mathrm{sign}^2(p,q)$, где $p,q>0$, $p+q=n\geq 3$

Если $Q \neq \lambda \cdot F(x)$, где F — кв. ф. над $\mathbb{Z}$, то

$$\mathrm{clos}(Q(\mathbb{Z}^n)) = \mathbb{R}.$$

Пример 1) если $Q(x)>0$, то $\mathrm{clos}(Q(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathbb{R}_+$

Упр. Д-ть, что $Q(\mathbb{Z}^n)$ в этом случае дискретно.

Напр. пусть $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\mathbb{Z}^n \rightsquigarrow L$.

Рассм. $Q^{-1}([0,c]) \cap L =$ шар $\cap L$ = конечное мн-во

2) Пусть $Q \sim (1,1)$, тогда $Q^{-1}([0,c]) \cap L$ — бесконечное подмн-во

Дальнейший план

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Мера Хаара}\\ \text{2. Фунд. область для } \Gamma \curvearrowright G\end{array}\right\}\ \text{Lect 2}$$

3. Основы эргодичности — Lect 3.