Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 9: симметрические и кососимметрические тензоры, внешние формы, операции с расслоениями, дифференциальные формы

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Симметрические и кососимм. тензоры

Опр Вект. пр-во $S^p(V)$ вместе с симм. p-линейным отобр. $V\times\ldots\times V \to S^p(V)$, $(x_1,\ldots,x_p)\mapsto x_1\vee\ldots\vee x_p$, и базисом $\{e_{j_1}\vee\ldots\vee e_{j_p} \mid j_1\le\ldots\le j_p\}$, называется p-й симм. степенью пр-ва V.

Данное определение не зависит базиса; симм. степ. единств.

Предл. Для произв. симм. p-лин. отобр $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ существует единств. лин. отобр. $f: S^p(V)\to V$, такое, что

$$\varphi(x_1,\ldots,x_p) = f(x_1\vee\ldots\vee x_p) \text{ для произв. } x_1,\ldots,x_p\in V.$$

Заметим, что $\vee$ задает билин. отобр. $\vee: S^p(V)\times S^q(V)\to S^{p+q}(V)$, что позволяет нам получить градуированную алгебру

$$S(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p(V) \quad (\text{она коммут, ассоц, с } "1" = k = S^0(V))$$

Опред. действие группы перестановок $S_p \curvearrowright T^p(V)$:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)^\sigma = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}. \qquad (T \longmapsto T^\sigma)$$

Заметим, что $(T^\sigma)^\tau = T^{\sigma\tau}$.

Опр Тензор T назыв. симм., если $T^\sigma = T$ для всякой $\sigma \in S_p$.

Симм. тензоры образ. подпр-во $ST^p(V) < T^p(V)$.

Аналогично можно определить симм. тензоры в $T^0_p(V) \simeq T^p(V^*)$.

Опр. Оператор симметрир-вания: $\mathrm{Sym} : T^p(V) \to ST^p(V)$, где

$$\mathrm{Sym}\, T = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} T^\sigma$$

(ясно, что $\mathrm{Sym}\, T = T$, если $T \in ST^p(V)$).

Предл. При условии, что поле k нулевой хар-ки, имеется изоморфизм $\mu : S^p(V) \to ST^p(V)$, где

$$\mu(x_1 \vee \ldots \vee x_p) = \mathrm{Sym}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p).$$

Аналогично, $S_p(V) = S^p(V^*) = ST_p(V) = ST^p(V^*)$. — пр-во симм. p-лин. ф-ций.

Можно рассм. пр-во $ST(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} ST^p(V)$ (на нем можно задать стр-ру алгебры след. обр: $T \vee U = \mathrm{Sym}(T \otimes U)$.)

Заметим, что операция симм. полилин. ф-ции имеет вид:

$$(\mathrm{Sym}\, \alpha)(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}).$$

Каждой симм. ф-ции $\alpha \in S_p(V)$ можно поставить в соответствие многочлен f_α по формуле $f_\alpha(x) = \alpha(x, \ldots, x)$.

Соотв. отобр. $\alpha \mapsto f_\alpha$ осуществляет $ST_p(V) \cong S_p(V)$.

Симм. полилин. ф-ция α называется поляризацией одноp. мн-на f_α.

<u>Пример</u> $f(x) = x_1^3 + x_2^2 x_3$. Его поляризация есть

$$\alpha(x, y, z) = x_1 y_1 z_1 + \frac{1}{3}(x_3 y_2 z_2 + x_2 y_3 z_2 + x_2 y_2 z_3).$$

(Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.)

Отметим, что кососимм тензоры образуют пр-во $\Lambda T^p(V)$, которое изоморфно внешней степени $\Lambda^p(V)$ с базисом из элементарных внешних мономов $e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}$, где $j_1<\ldots<j_p$. Известно, что $\dim \Lambda^p(V) = C_n^p = \binom{n}{p}$

(элементы $\Lambda^p(V)$ есть $\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p} a_{j_1\ldots j_p}\, e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}$.)

<u>Обозн.</u> $\Lambda_p(V) = \Lambda^p(V^*) = \Lambda T_p(V) = \Lambda T^p_0(V^*)$ — это пр-во кососимм полилин. функций на V. — <u>р-формы</u>!

<u>Примеры</u> 1) $\omega_1 \in \Lambda^1(V^*) = \Lambda_1(V)$ — 1-форма

$\omega_2 \in \Lambda^2(V^*) = \Lambda_2(V)$ — 2-форма

Здесь $V = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $V^* = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$, где $f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$\omega_1 = f_1 + 2f_2$; $\omega_2 = f_2\wedge f_3$. Тогда, напр., $\omega_1\wedge\omega_2 = f_1\wedge f_2\wedge f_3 + \underbrace{2f_2\wedge f_2\wedge f_3}_{=0} = f_1\wedge f_2\wedge f_3$.

$\Lambda^3(V^*)$ — 3-форма

2) Пусть $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,2)$.

Тогда $\omega_2(v_1, v_2) = (f_2\wedge f_3)(e_1+e_2,\ e_2+2e_3) = (f_2\wedge f_3)(e_1, e_2) + 2f_2\wedge f_3(e_1, e_3) + 2f_2\wedge f_3(e_2, e_3) =$

$\ominus$ $0+0+2=2$, т.к. $(f_i \wedge f_j)(e_k, e_l) = 0$, если $(i,j) \neq (k,l)$

(при $i<j$ и $k<l$ дост., чтобы $i \neq k$ или $j \neq l$).

Общее правило для вычисления значения эл-ных мономов на наборе из p векторов:

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det\left(f_i(v_j)\right).$$

Более того, это правило работает для произв. любых 1-форм:

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det(\omega_i(v_j)).$$

Опр. оператор альтернирования $\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\sigma} T^{\sigma}$.

$\mathrm{Alt} : T^p(V) \to \Lambda T^p(V)$. (суть изоморфизма $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \longmapsto \mathrm{Alt}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$)

Теор. 1) $v_1, \ldots, v_p$ – лин. незав $V \Leftrightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \neq 0$.

2) Пусть $u_1, \ldots, u_p$; $v_1, \ldots, v_p$ – лин. незав. наборы. Тогда $\langle u_1, \ldots, u_p \rangle = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \lambda \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_p.$$

2. Операции с векторными расслоениями

Рассм. расслоение $\pi : E \to B$. Определим внешнюю степень расслоения π как расслоение $\pi^{\wedge p} : E^{\wedge p} \to B$, которое является подрасслоением тензорного произведения $\pi^{\otimes p} : E^{\otimes p} \to B$. Слоями $\pi^{\wedge p}$ являются вект. пр-ва $(E_x)^{\wedge p}$ $(x \in B)$, и $E^{\wedge p} = \bigcup_{x \in B} (E_x)^{\wedge p}$.

Заметим, что $\{e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} \mid j_1 < \ldots < j_p\}$ образуют базисный набор сечений и тривиализацию расслоения $\pi^{\wedge p} : E^{\wedge p} \to B$

3. Тензорные поля и дифференциальные формы на многообразиях.

Пусть M — гл. мн-е, $\pi : TM \to M$ — касат. расслоения.
$\pi^* : T^*M \to M$ — кокасат.

Заметим, что $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x \right\}$ обр. базисный набор сечений касат. рассл-я.

Отметим, что $dx_1, \dots, dx_n$ — базис T^*M, двойственный к $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Напомним, что вект. поля — сечения касат. рассл.

Тензорные произведения вект. и ковект. расслоений $\pi^{\otimes p} \otimes (\pi^*)^{\otimes q} : (TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q} \longrightarrow M$ называются тензорными расслоениями типа (p,q), а их сечения — тензорными полями. В лок. коорд. тенз. поле имеет вид

$$T = \cancel{\sum_{i,j}} T^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q}(x) \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} \otimes dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_q}, \text{ где}$$

$T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}(x)$ – гладкие функции от $x\in M$.

Теор. Пусть $\tilde{x}_j=\tilde{x}_j(x_1,\dots,x_n)$ и $x_j=x_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$.

Тогда коорд. тензора меняются по след. правилу

$$\tilde{T}^{\tilde{j}_1\dots\tilde{j}_p}_{\tilde{i}_1\dots\tilde{i}_q}=T^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_q}\frac{\partial\tilde{x}_{j_1}}{\partial x_{j_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}_{j_p}}{\partial x_{j_p}}\cdot\frac{\partial x_{i_1}}{\partial\tilde{x}_{i_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_q}}{\partial\tilde{x}_{i_q}}.$$

(следует из того, что $\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial\tilde{x}_j}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}$ и

$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial\tilde{x}_i}\cdot d\tilde{x}_i$.)

Опр 1 Дифф. k-форма на гл. мн-ии M — это k-форма (кососимм. k-лин. ф-ция) на T^*M, гладко зависящая от точки $x \in M$

То есть ω имеет вид $\omega = \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$.

Опр 2. Дифф. k-формы — сечения внешней k-степени $(T^*M)^{\wedge k}$ кокасат. расслоения.

Гладкие ф-ции — 0-формы

Обозн: пр-во дифф. k-форм $= \Lambda^k(M)$ (подразум. $\Lambda^k(T^*M)$).

Опр. Оператор дифференцирования: $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$,

где $d\omega = \sum\limits_{j_1 < \ldots < j_k} \left(d\omega_{j_1 \ldots j_k}(x)\right) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$.

Пример 1) $f(x) = x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$; $df(x) = 2x \cdot dx \in \Lambda^1(\mathbb{R})$.

2) $\omega = x\,dy + y^2 \cdot dz$, где $M = \mathbb{R}^3 = \langle x, y, z \rangle$.

Тогда $d\omega = dx \wedge dy + 2y\, dy \wedge dz \in \Lambda^2(M)$.