Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 8: операции с расслоениями, тензоры, внешние формы

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1 Операции с расслоения

Пусть $(\overset{\text{тот. пр-во}}{E}, \overset{\text{база}}{B}, F, \pi)$ — вект. расслоение, т.е. слой F имеет структуру вект. пр-ва.

На вект. рассл. можно смотреть как на спец. семейство $\{E_p \mid p \in B\}$ вект. пр-во (аналогично касат. рассл-ю TM).

1.1. Сопряжение расслоений.

Общее соображ-е: если $V = \langle e_1, .., e_n \rangle$, то $V^* = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$,
где $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

Для каждого слоя $E_p = \langle e_j(p), j \leq n \rangle$ рассм. $E_p^* = \langle e_j^*(p), j = 1, .., n \rangle$.

Далее $E^* = \bigcup\limits_p E_p^*$; $\pi^* : E^* \to B$, где $\pi^*(E_p^*) = p$.

Лемма $\pi^* : E^* \to B$ — лок. трив. расслоение

Док-во: Для каждой точки $p \in B$ возьмем окр-ть $U \subset B$, т.ч. существует базисный набор сечений $\{e_i(p), i = 1, \dots, n\}$.

Рассмотрим $\{e_i^*(p), i = 1, \dots, n\}$. Эти двойственные сечения образуют набор базисных сечений для отобр. $\pi^* : E^* \to B$.

Заметим, что для каждой локальной тривиализации $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ существует локальная трив. h_α^* расс. π^*.

(для разных карт: $h_\beta h_\alpha^{-1} : p \times v \to$
$\to p \times g_{\alpha\beta}(p) v$,
здесь $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$)

Сечения расслоения $\pi^* : E^* \to B$ — линейные функционалы.

1.2. Тензорное произведение расслоений

Рассм расслоения $\pi^1 : E^1 \to B$ и $\pi^2 : E^2 \to B$.

Определим тензорное произведение рассл. π^1 и π^2:

$$\pi = \pi^1 \otimes \pi^2 : E \to B.$$

Слои расслоения π опред. как тенз. произв.: $E_p = E_p^1 \otimes E_p^2$.

Тотальное пр-во тогда имеет вид $E = \bigcup\limits_p E_p$.

Проекция π — есть отобр. $E_p \mapsto p$.

Лемма $\pi : E \to B$ — вект. рассл.

Док-во: $\forall p \in B \; \exists \underset{\text{окр.}}{U \subset B}$, т.ч. имеется набор базисных сечений $\{e_1^1(p), \ldots, e_n^1(p)\}$ и $\{e_1^2(p), \ldots, e_n^2(p)\}$. Но тогда $\{e_i^1(p) \otimes e_j^2(p) \mid 1 \le i,j \le n\}$ образуют базисные сечения для $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$, ч.т.д. ◻

2. Тензоры

Пр-во $T^p_q(V) = \underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q}$ называется

пространством тензоров типа (p,q) на V.

Заметим, что $T^0_0(V) = k$ – поле; $\dim T^p_q(V) = n^{p+q}$.

Далее имеем: $T^1_0(V) = V$; $T^0_1(V) = V^*$; и

$T^0_q(V) = \mathrm{Hom}(\underbrace{V,\ldots,V}_{q};k)$; $T^1_q(V) = \mathrm{Hom}(\underbrace{V,\ldots,V}_{q};V)$.

Отметим, что тензоры типа $(0,2)$ - билин. ф-ции,

тензоры типа $(1,1)$ — линейные операторы $(T^1_1(V)\simeq L(V))$,

тензоры типа $(1,2)$ — билинейные структуры/формы на V.

Тенз. произв. опред. билин. операцию

$$\otimes : T^p_q(V) \times T^r_s(V) \longrightarrow T^{p+r}_{q+s}(V), \text{ где}$$

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q) \otimes (x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+r} \otimes \alpha_{q+1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{q+s}) =$$

$$= x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q} \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{q+s}.$$

<u>Пример</u> $T^2_2(V) = V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = \underbrace{(V \otimes V)}_{= U} \otimes (V \otimes V)^*.$

Тогда $T^2_2(V) = T^1_1(U) = L(U) = L(V \otimes V).$

Заметим, что $\otimes : T^1_1(V) \times T^1_1(V) \to T^2_2(V)$ — операция тенз. умн-я лин. операторов. Рассм. более общую картину: $A \in L(V)$, $B \in L(W)$.

$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By$; пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $W = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$.

Тогда матр. $A \otimes B$ в базисе $e_i \otimes f_j$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & \ldots & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\forall v \in V \otimes V^*$ есть разл. $v = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \ell_j$

Можно рассматривать разложимые операторы: $A = u \otimes \alpha$

$B = v \otimes \beta.$

$(u, v \in V;$
$\alpha, \beta \in V^*)$

Посмотрим на их произвед:

$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax \otimes By) = \alpha(x)\beta(y)\, u \otimes v =$

$= ((\alpha \otimes \beta)(x \otimes y))\, u \otimes v = ((u \otimes v) \otimes (\alpha \otimes \beta))(x \otimes y).$

Следовательно, $A \otimes B = u \otimes v \otimes \alpha \otimes \beta \in T_2^2(V).$

(здесь мы воспользовались тем, что $\alpha(x)\beta(y) = (\alpha \otimes \beta)(x \otimes y)$)

Ещё одна важная операция с тензорами: операция свертки.

Свертка: $T_q^p(V) \to T_{q-1}^{p-1}(V) \quad (p, q > 0)$, где

$$(x_1,\dots,x_p,\alpha_1,\dots,\alpha_q)\xmapsto{\text{свертка по 1-му индексу}}\alpha_1(x_1)(x_2\otimes\dots\otimes x_p\otimes\alpha_2\otimes\dots\otimes\alpha_q).$$

$$\underbrace{V\times\dots\times V}_{p}\times\underbrace{V^*\times\dots\times V^*}_{q}$$

Заметим, что полиномиальное отображение полилин., след. сущ. лин. отобр. свертки $T^p_q(V)\to T^{p-1}_{q-1}(V)$, где

$$x_1\otimes\dots\otimes x_p\otimes\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_q\mapsto\alpha_1(x_1)(x_2\otimes\dots\otimes x_p\otimes\alpha_2\otimes\dots\otimes\alpha_q).$$

Свертку можно проводить по любой паре множителей.

Пусть e_j - базис V; f_j - базис пр-ва V^*.

Тогда $\{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes f_{j_1}\otimes\dots\otimes f_{j_q}\}$ - базис пр-ва $T^p_q(V)$.

Любой тензор имеет вид $T=T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes f_{j_1}\otimes\dots\otimes f_{j_q}$.

сокращ. символика Эйнштейна - суммирование идет по повтор. индексам снизу и сверху.

<u>Пример</u> $A \in L(V) = T^1_1(V)$. Тогда $A = A_{ij} \cdot e_i \otimes f_j$. ($\sum_{i,j}$ опущ) (Но она есть!)

($(Ax)^i = A^i_j x^j$, где $A^i_j = A_{ij}$, $x^j = x_j$.)

i-я коорд. вект.

Часто так пишут.

3. Алгебра внешних форм, алгебра Грассмана, внешняя алгебра (exterior algebra)

Определим пр-во кососимм. полилин. ф-ций: $\Lambda^p(V)$. ← пр-во p-форм

Ясно, что $\Lambda^0(V) = k$, $\Lambda^1(V) = V^*$, $\Lambda^2(V)$ – пр-во кососимм. билин. форм на V.

Внешнее произв. лин. функционалов:

$(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \longmapsto (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)$, где $\varphi_j \in V^*$:

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)(v_1, \dots, v_m) = \det\big(\varphi_i(v_j)\big)_{i,j=1,\dots,m}.$$

Заметим, что операция $\wedge$ тоже кососимм.

Предл. $\Lambda^2(V) =$ мн-во 2 форм $= \langle f_i \wedge f_j \mid i<j \rangle$,
где $\langle f_1, .., f_n \rangle = V^*$ базис.

Док-во: Рассм произв. 2-форму $\omega \in \Lambda^2(V)$.

Заметим, что на паре $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_j e_j$

$$\omega(u,v) = \omega\Big(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j\Big) = \sum_{i,j} u_i v_j \underbrace{\omega(e_i, e_j)}_{\omega_{ij} = -\omega_{ji}} =$$

$$= \sum_{i,j} u_i v_j \omega_{ij} \cdot (f_i \wedge f_j)(e_i, e_j) = $$

дело в том, что
$$(f_i \wedge f_j)(e_k, e_l) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=k,\ l=j. \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \sum_{i<j} \omega_{ij} (u_i v_j - u_j v_i)(f_i \wedge f_j)(e_i, e_j) =$$

$$(f_i \wedge f_j)(u,v) = u_i v_j - u_j v_i$$

$$= \sum_{i<j} \omega_{ij}\, f_i \wedge f_j (u, v), \quad u = \sum_k u_k e_k,\ v = \sum_l v_l e_l.$$

Остается показать лин незав-ть:
$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} f_i \wedge f_j = 0$.

Отсюда следует, что $\omega \in \langle f_i \wedge f_j \rangle$.

Применим ω к паре (e_k, e_m): $\omega(e_k, e_m) = w_{km} = 0$
для всякой пары (k, m).

Отсюда следует лин. нез-ть $f_i \wedge f_j$. $\boxed{\checkmark}$

Следствие $\dim \Lambda^2(V) = C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Опр Внешним мономом степени p назовём произведение вида $f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_p}$.

Предл. $\Lambda^p(V) = \langle f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_p}$, где $j_1 < \ldots < j_p \rangle$,
$\dim \Lambda^p(V) = C_n^p = \binom{n}{p}$.

Док-во: аналогично.