Дифференциальная геометрия и топология

Лекция 7: тензорные произведения; локально-тривиальные расслоения — накрытия и векторные расслоения.

Богачев Николай Владимирович

ИППИ РАН & МФТИ

Весна 2022

Содержание

1. Тензорные произведения

Пусть $V_1, \ldots, V_p, U$ – вект. пр-ва над k.

Обозн. через $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_p; U)$ – вект. пр-во полилин. отобр. $V_1 \times \ldots \times V_p \to U$. Заметим, что $\dim \mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_p; U) = \left(\prod_{j=1}^{p} \dim V_j\right) \cdot \dim U$.

Опр. Тенз. произведение пр-в V и W назыв. пр-во T вместе с билин. отобр. $\otimes : V \times W \to T$, где $(x, y) \longmapsto x \otimes y$, удовл. след. условию: если $\{e_i, i \in I\}$ и $\{f_j, j \in J\}$ – базисы V и W, то $\{t_{ij} = e_i \otimes f_j, i \in I, j \in J\}$ – базис пр-ва T.

Предл. Пусть $T = V \otimes W$. Тогда

1) всякий вектор $t = \sum_{i \in I} e_i \otimes w_i$ — единств. обр.

2) — // — $t = \sum_{j \in J} v_j \otimes f_j$.

Пример $k[x] \otimes k[y] = k[x, y]$.

$k[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \rangle$

$k[y] = \langle 1, y, y^2, \ldots, y^m, \ldots \rangle$

$\otimes : (p(x), q(y)) \mapsto (p \otimes q)(x, y) := p(x) \cdot q(y)$.

$x^n \otimes y^m = x^n y^m$.

Вуаля! (т.к. $x^n y^m$ образ. базис $k[x, y]$).

2. Локально-тривиальные расслоения

Опр. Локально-трив. расслоение (fibre bundle) — это четверка (E, B, F, p), где $p: E \to B$ - сюръективное гладкое отобр., E, B - гладкие мн-я, причем выполнены след. св-ва:

1) для всякой точки $x \in B$ $\exists$ окр-ть U:
$$p^{-1}(U) \underset{\text{- diffeo}}{\cong} U \times F$$

2) Диффеоморфизм $U \times F \to p^{-1}(U)$ согласован с отобр. p, т.е. след. диагр. коммут.:

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Здесь p — проекция, B — база (base), F — слой (fibre)

E — тотальное пр-во.

<u>Примеры</u>

1) Рассм. $p: M \times N \to M$ — проекция.
Это тривиальное расслоение. (N — слой).

2) Касат. расслоение $p: TM \to M$.
Слой $= T_x M$. Для всякой $x \in M$ $\exists$ окр. $U(x)$

$$p^{-1}(U(x)) = \bigsqcup_x T_x M.$$

3) Расслоение $p: Mб^{\circ} \to S^1$ со слоем $\mathbb{R}$.
Пункты 2) и 3) — это примеры <u>вект. расслоений</u>.

4) <u>Накрытия</u> — расслоения с дискр. слоем.

3. Накрытия

Опр. Накрытие – лок. трив. расслоение с дискр. слоем, т.е. (E, B, D, p), где D – дискр. мн-во, p – гл. отобр.,

$$p^{-1}(U(x)) = \bigsqcup_{d \in D} V_d, \text{ где } V_d \underset{\text{diffeo}}{\cong} U(x).$$

Здесь $D = F$ – слой.

Пр-во E – накрывающее многообразие.

Если $\operatorname{card}(D) = n$, то $p : E \to B$ – n-листное накрытие.

Если E – односв., то накрытие назыв. (является) универс.

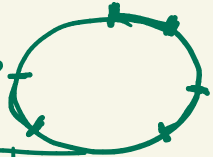
$$\left(\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \tilde{E} \arrow[r] & B \end{tikzcd} \right)$$

Утв. Пусть $\pi_1(B)$ – фунд. группа базы B, $p : E \to B$ – универс. накрытие. Тогда $\pi_1(B)$ действует (диффеоморфизмами) вполне разрывно на E:

$$\forall \underset{\text{компакт}}{K < E} : \operatorname{card}(\{\gamma \in \pi_1(B) \mid \gamma(K) \cap K \neq \varnothing\}) < +\infty.$$

$$(\gamma : E \to E;\ \gamma \in \operatorname{Diffeo}(E))$$

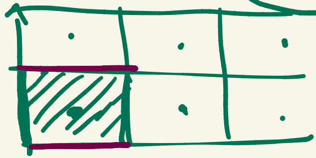
Примеры 1) $\omega_3 : S^1 \to S^1$; $e^{i\varphi} \mapsto e^{3i\varphi}$ — 3-листное накрытие

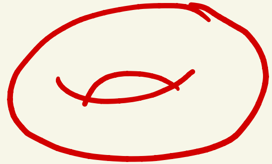


2) $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ — счетно-листное накрытие.

$(x, y) \mapsto (2\pi\{x\}, 2\pi\{y\})$

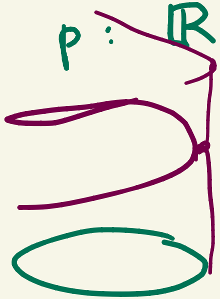
$S^1 \times S^1 \cong T^2$





На самом деле $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ — дискр. группа паралл. переносов

3) $p : \mathbb{R} \to S^1$; $p(t) = e^{it}$;



$p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ — слой.

$1 = e^{2\pi z}$, $z \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

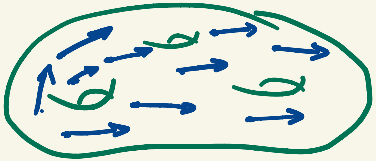
4. Векторные поля

Опр. Вект. поле — гл. отобр. $X: M \to TM$; $p \mapsto X_p \in T_pM$, т.что $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$, где $\pi: TM \to M$ — касат. рассл.

Пусть (U, φ) — карта на M. Базис в U удобно записывать в виде $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Напр., если $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ — гл. рег. пов., то $T_xM = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle$, где $M = f(\mathbb{R}^m)$.

Тогда
$$X_p = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{X^j(p)}_{\text{компоненты}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$



Примеры 1) Коорд. вект. поле $p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p$.

2) Эйлерово вект. поле $V_x = x_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x + \ldots + x_n \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_x$.

Операции с вект. полями:

Опр $\mathfrak{X}(M)$ – вект. пр-во всех вект. полей на M.

1) $(aX+bY)_p = aX_p + bY_p$.

2) композиция с гл. функциями:

$f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, определяем $fX : M \to TM$:

$$(fX)_p = f(p)\cdot X_p$$

Утв. 1) $f, g \in C^\infty(M)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow fX + gY \in \mathfrak{X}(M)$

2) $\mathfrak{X}(M)$ – модуль над кольцом $C^\infty(M)$.

Расс. $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, тогда $(Xf) \in C^\infty(M)$: $(Xf)(p) = X_p \cdot f(p)$

$$M \xrightarrow{X} TM \qquad M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

применение X к f: $X_p f = \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Утв. $X(fg) = f\cdot(Xg) + g(Xf)$ (пр-ло Лейбница)

(т.е. вект. поле X соотв. дифференцированию $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$).

Опр Коммутатор вект. полей:

$$[X, Y]f = XY\cdot f - YX\cdot f.$$

Утв. $[X, Y]$ – вект. поле. ($\mathfrak{X}(M)$ – алгебра Ли вект. полей)

$$[X, Y]_p \cdot f = X_p \cdot (Yf) - Y_p (Xf).$$

5. Вект. расслоения

Опр. Вект. расслоение – лок. трив. рассл. (E, B, F, p), где слой F имеет стр. вект. пр-ва.

Примеры Касат.; Норм расс-я.

Опр. Сечение вект. расслоения на подмн-ве $U \subset B$ – это такое гладкое отобр. $s: U \to E$: $p \circ s = \mathrm{Id}$.

т.е. сечение сопост. каждой точке $p \mapsto$ вектор из слоя F_p.

Утв. Вект. поле — сечение касат. расслоения.

Операции с вект. расслоениями

Сопряжение

Тензорное произведение.

Продолжение следует...